

第6問

複素数平面上の点 $\frac{1}{2}$ を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の円の周から原点を除いた曲線を C とする。

- (1) 曲線 C 上の複素数 z に対し, $\frac{1}{z}$ の実部は 1 であることを示せ。
- (2) α, β を曲線 C 上の相異なる複素数とすると, $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}$ がとりうる範囲を複素数平面上に図示せよ。
- (3) γ を (2) で求めた範囲に属さない複素数とすると, $\frac{1}{\gamma}$ の実部がとりうる値の最大値と最小値を求めよ。

解説・解答

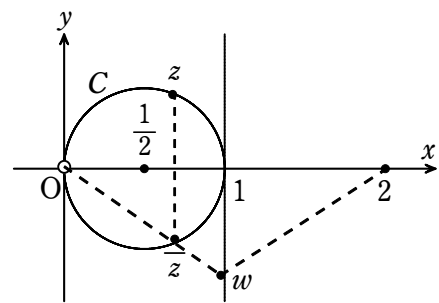
(1) z が C 上にあることから $z \neq 0, \left|z - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$ ……①

$w = \frac{1}{z}$ とおくと ① は $\left|\frac{1}{w} - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$

両辺に $|2w|$ をかけると $|w - 2| = |w|$

点 w は原点と点 2 とから等距離にあるから, この 2 点を

結ぶ線分の垂直二等分線上にある。すなわち $w = \frac{1}{z}$ の実部は 1 である。



(2) (1) から a, b を実数として $\frac{1}{\alpha} = 1 + ai, \frac{1}{\beta} = 1 + bi$ ($a \neq b$) とおくことができる。

$$\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = (1 + ai)^2 + (1 + bi)^2 = 2 - a^2 - b^2 + 2(a + b)i$$

x, y を実数として $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = x + yi$ とおくと $x = 2 - a^2 - b^2, y = 2(a + b)$ これらから

$$a + b = \frac{y}{2},$$

$$2ab = (a + b)^2 - (a^2 + b^2) = \left(\frac{y}{2}\right)^2 - (2 - x) \text{ から } ab = \frac{x}{2} + \frac{y^2}{8} - 1$$

ここで X の 2 次方程式 $X^2 - \frac{y}{2}X + \left(\frac{x}{2} + \frac{y^2}{8} - 1\right) = 0$ が相異なる

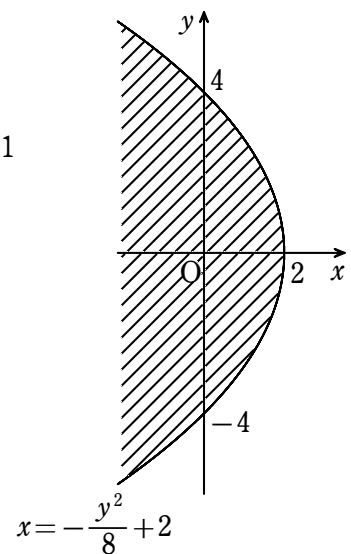
2 実数解 a, b をもつためには, 判別式を D として

$$D = \left(\frac{y}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{x}{2} + \frac{y^2}{8} - 1\right) = -2x - \frac{y^2}{4} + 4 > 0$$

よって $x < -\frac{y^2}{8} + 2$

$\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = x + yi$ のとりうる範囲は右図の斜線部分, ただし

境界は含まない。



(3) x, y を実数として $\gamma = x + yi$ とおくと, x, y は

$$x \geq -\frac{y^2}{8} + 2 \quad \dots\dots ①$$

を満たす。 $\frac{1}{\gamma} = \frac{x - yi}{x^2 + y^2}$ だから $\frac{1}{\gamma}$ の実部を s とすると

$$s = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

① の条件の下で s のとりうる値の範囲を求めればよい。

$$x = 0, |y| \geq 4 \text{ では } s = 0$$

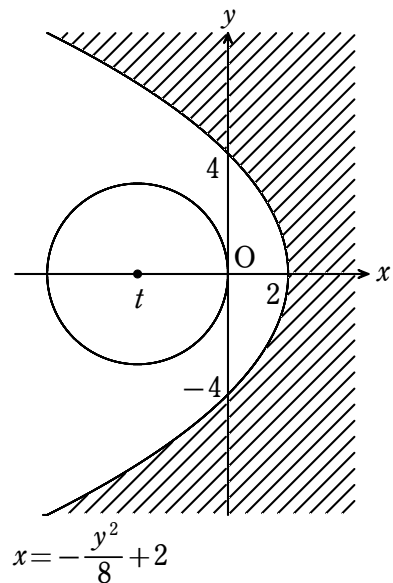
$$s \neq 0 \text{ のとき } s = \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2t} \quad \dots\dots ② \text{ とおくと}$$

$$x^2 + y^2 - 2tx = 0 \text{ から } (x - t)^2 + y^2 = t^2 \quad \dots\dots ②'$$

②' は中心が $(t, 0)$ で原点を通る円を表す。

②' と ① を満たす実数 x, y が存在するのは, 円 ②' と

放物線 $x = -\frac{y^2}{8} + 2 \quad \dots\dots ①'$ が共有点をもつことである。



①', ②' を連立方程式とみなして実数解 (x, y) をもつための t の値の範囲を求めればよい。

$$y^2 = -8x + 16 \quad \dots\dots ①' \quad x^2 + y^2 - 2tx = 0 \quad \dots\dots ②'$$

$$\text{まず } y^2 = -8x + 16 \geq 0 \text{ から } x \leq 2 \quad \dots\dots ③$$

①', ②' から y^2 を消去して

$$x^2 - 2tx - 8x + 16 = 0 \text{ から } x^2 - 2(t+4)x + 16 = 0 \quad \dots\dots ④$$

$$f(x) = x^2 - 2(t+4)x + 16 = \{x - (t+4)\}^2 - t(t+8) \text{ とすると}$$

方程式 $f(x) = 0$ が $x \leq 2$ となる解をもつには, 放物線

$Y = f(x)$ が x 軸と $x \leq 2$ の範囲に共有点をもてばよい。

そのためには

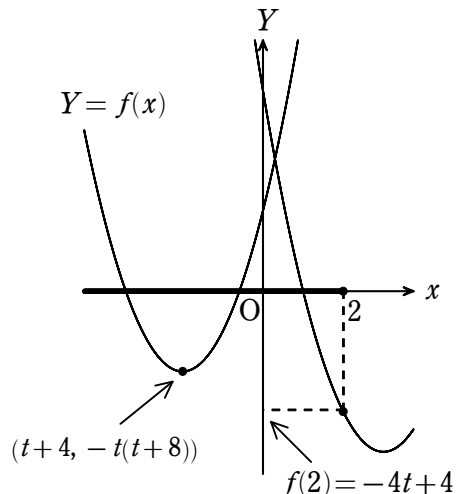
$$f(2) = -4t + 4 \leq 0 \text{ または } t + 4 \leq 0, -t(t+8) \leq 0$$

$$\text{よって } t \geq 1 \text{ または } t \leq -8$$

$$t = \frac{1}{2s} \text{ であるから}$$

$$\frac{1}{2s} \geq 1 \text{ から } 0 < s \leq \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2s} \leq -8 \text{ から } -\frac{1}{16} \leq s < 0$$

以上をまとめると $-\frac{1}{16} \leq \frac{x}{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{2}$, すなわち求める値の最大値は $\frac{1}{2}$, 最小値は $-\frac{1}{16}$



感想

複素数平面の問題にみえますが, 方程式あるいは図形と方程式の分野も含んでいます。

(2) 2変数の実数条件 ← 2次方程式の解と係数, 判別式, 図形の方程式

(3) 変数の値の範囲 ← 放物線と円が共有点をもつ条件

など, これまでにも取り上げられることの多い題材が1題の中に詰まっています。

作問の力が凄いですね。