

解説

(1)  $C_1$  のうち、 $x \leq 0$  の部分、 $x \geq 0$  の部分を  $C_{11}$ ,  $C_{12}$ , 関数を  $f_{11}(x)$ ,  $f_{12}(x)$  とする。すなわち

$$C_{11}: y=f_{11}(x), f_{11}(x)=x^2+2x=(x+1)^2-1 \quad (x \leq 0)$$

$$C_{12}: y=f_{12}(x), f_{12}(x)=x^2-2x=(x-1)^2-1 \quad (x \geq 0)$$

また  $C_2: y=f_2(x), f_2(x)=x^2-5x+\frac{7}{4}=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{9}{2}$

とする。これらの導関数は

$$f_{11}'(x)=2x+2 \quad (x \leq 0), f_{12}'(x)=2x-2 \quad (x \geq 0)$$

$$f_2'(x)=2x-5$$

$C_{11}$ ,  $C_{12}$ ,  $C_2$  の頂点を  $A_{11}$ ,  $A_{12}$ ,  $A_2$  とすると

$$A_{11}(-1, -1), A_{12}(1, -1), A_2\left(\frac{5}{2}, -\frac{9}{2}\right)$$

$C_{11}$  は平行移動  $\overrightarrow{A_{11}A_2}=\left(\frac{7}{2}, -\frac{7}{2}\right)$  によって  $C_2$  に重なり

共通な接線が存在すれば、同じ平行移動によって接点どうしも重なる。接線の傾きは直線  $A_{11}A_2$  の傾きに等しく

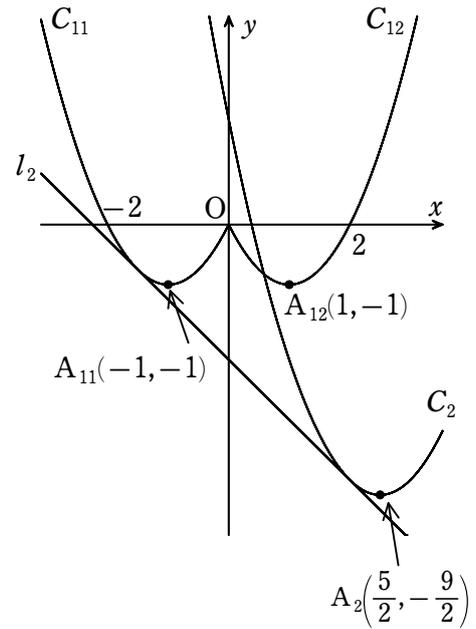
$-1$  である。 $f_{11}'(x)=2x+2=-1$  となるのは  $x=-\frac{3}{2}$  で、 $C_{11}$  の接点が  $x \leq 0$  の範囲に存在

する。 $C_2$  の接点の  $x$  座標は  $f_2'(x)=-1$  から  $x=2$  である。

$C_{12}$  は平行移動  $\overrightarrow{A_{12}A_2}=\left(\frac{3}{2}, -\frac{7}{2}\right)$  によって  $C_2$  に重なり、直線  $A_{12}A_2$  の傾きは  $-\frac{7}{3}$  で

あり  $f_{12}'(x)=-\frac{7}{3}$  となるのは  $x=-\frac{2}{3}$  であるが、 $f_{12}(x)$  の定義域内にはない。

以上から  $C_1$  と  $C_2$  に共通な接線がただ一つ存在する。



(2)  $\alpha=-\frac{3}{2}, f_{11}\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{3}{4}$  から  $P\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{4}\right)$

$l_2$  は  $P$  を通り傾きが  $-1$  だから

$$y-\left(-\frac{3}{4}\right)=-\left\{x-\left(-\frac{3}{2}\right)\right\} \text{ から } y=-x-\frac{9}{4}$$

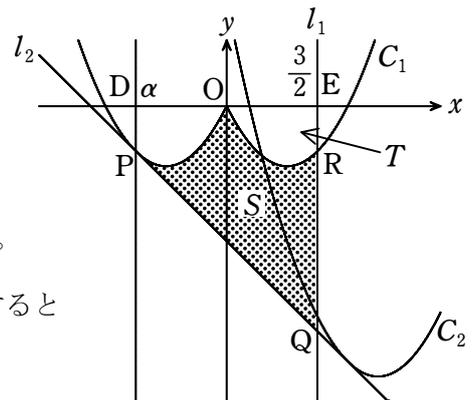
これから  $Q\left(\frac{3}{2}, -\frac{15}{4}\right)$ , また  $D\left(-\frac{3}{2}, 0\right), E\left(\frac{3}{2}, 0\right)$  とする。

$x$  軸,  $C_1$  の  $x \geq 0$  の部分,  $l_1$  で囲まれた部分の面積を  $T$  とすると

$$T=\int_0^{\frac{3}{2}}(-x^2+2x)dx=\left[-\frac{x^3}{3}+x^2\right]_0^{\frac{3}{2}}=\frac{9}{8}$$

求める図形の面積  $S$  は

$$S=(\text{台形DPQEの面積})-2T=\frac{3}{2} \cdot 3 \cdot \left(\frac{3}{4}+\frac{15}{4}\right)-2 \times \frac{9}{8}=\frac{27}{4}-\frac{9}{4}=\frac{9}{2}$$



感想

共通接線を求めるのに平行移動を利用しましたが、この解法が認められるかは確認できないので、解答の参考です。