

問題 5

(1) 関数  $f(t) = \frac{t^2 - 1}{t^3}$  ( $t \neq 0$ ) の増減を調べ、グラフの概形をかけ。

(2) 実数  $x, y, z$  が、条件

$$x < y < z \quad \dots \textcircled{2} \quad xyz \neq 0 \quad \dots \textcircled{3} \quad x^3 y^2 - x^3 = x^2 y^3 - y^3 \quad \dots \textcircled{4} \quad y^3 z^2 - y^3 = y^2 z^3 - z^3 \quad \dots \textcircled{5}$$

を満たしながら動くとき、 $x$  が取り得る値の範囲を求めよ。

解説

(1)  $u = f(t)$ ,  $f(t) = \frac{t^2 - 1}{t^3}$  ( $t \neq 0$ )  $\dots \textcircled{1}$  とする。

$f(-t) = -f(t)$  だから原点对称,  $f(1) = f(-1) = 0$

$|x| \gg 1$  (十分大きい), グラフの両端では

$\textcircled{1}$  の分子の 1 を無視して  $f(t) \doteq \frac{1}{t}$

$|x| \ll 1$ , 原点の近くでは  $\textcircled{1}$  の分子の  $t^2$  を

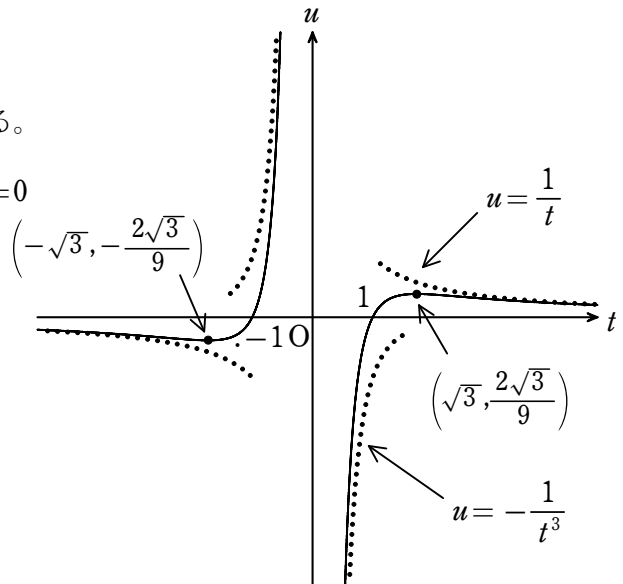
無視して  $f(t) \doteq -\frac{1}{t^3}$

これからグラフの概形を考えることができる。

解答としては

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \left(1 - \frac{1}{t^2}\right) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +0} f(t) = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{1}{t^3} (-1 + t^2) = -\infty$$

極値は  $f'(t) = \frac{-t^2 + 3}{t^4}$  から増減表をかいて求められる。



(2)  $\textcircled{4}$ ,  $\textcircled{5}$  の両辺をそれぞれ  $x^3 y^3$ ,  $y^3 z^3$  で割ると

$$\frac{x^2 - 1}{x^3} = \frac{y^2 - 1}{y^3} = \frac{z^2 - 1}{z^3} \quad (=k \text{ とおく})$$

条件  $\textcircled{2} \sim \textcircled{5}$  を満たす実数  $x, y, z$  が存在

$\Leftrightarrow \frac{t^2 - 1}{t^3} = k$  が異なる 3 実数解をもつ

この実数解が  $x, y, z$

$\Leftrightarrow u = \frac{t^2 - 1}{t^3}$  と  $u = k$  が異なる 3 つの

共有点をもつ

右図から

$-\frac{2\sqrt{3}}{9} < k < 0$  のとき  $x < -\sqrt{3}$ ,  $-\sqrt{3} < y < -1$ ,  $\frac{\sqrt{3}}{2} < z < 1$

$0 < k < \frac{2\sqrt{3}}{9}$  のとき  $-1 < x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $1 < y < \sqrt{3}$ ,  $\sqrt{3} < z$

