

問題 5

(1) 関数 $f(t) = \frac{t^2 - 1}{t^3}$ ($t \neq 0$) の増減を調べ、グラフの概形をかけ。

(2) 実数 x, y, z が、条件

$$x < y < z \quad \dots \textcircled{2} \quad xyz \neq 0 \quad \dots \textcircled{3} \quad x^3 y^2 - x^3 = x^2 y^3 - y^3 \quad \dots \textcircled{4} \quad y^3 z^2 - y^3 = y^2 z^3 - z^3 \quad \dots \textcircled{5}$$

を満たしながら動くとき、 x が取り得る値の範囲を求めよ。

解説

(1) $u = f(t)$, $f(t) = \frac{t^2 - 1}{t^3}$ ($t \neq 0$) $\dots \textcircled{1}$ とする。

$f(-t) = -f(t)$ だから原点对称, $f(1) = f(-1) = 0$

$|x| \gg 1$ (十分大きい), グラフの両端では

$\textcircled{1}$ の分子の 1 を無視して $f(t) \doteq \frac{1}{t}$

$|x| \ll 1$, 原点の近くでは $\textcircled{1}$ の分子の t^2 を

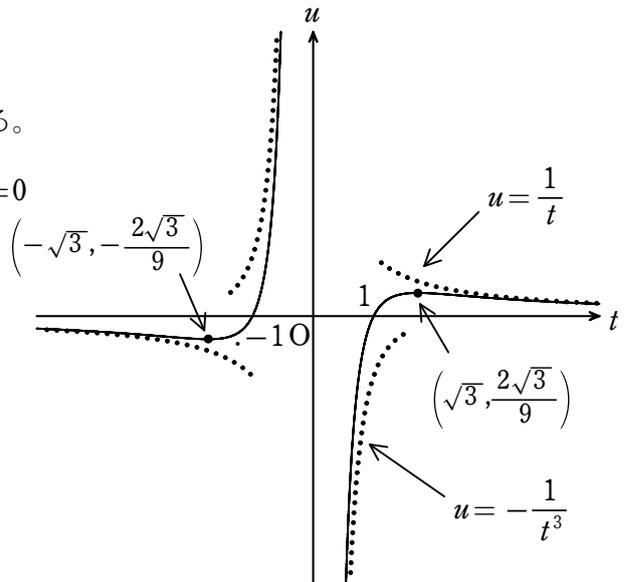
無視して $f(t) \doteq -\frac{1}{t^3}$

これからグラフの概形を考えることができる。

解答としては

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \left(1 - \frac{1}{t^2}\right) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +0} f(t) = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{1}{t^3} (-1 + t^2) = -\infty$$

極値は $f'(t) = \frac{-t^2 + 3}{t^4}$ から増減表をかいて求められる。



(2) $\textcircled{4}$, $\textcircled{5}$ の両辺をそれぞれ $x^3 y^3$, $y^3 z^3$ で割ると

$$\frac{x^2 - 1}{x^3} = \frac{y^2 - 1}{y^3} = \frac{z^2 - 1}{z^3} \quad (=k \text{ とおく})$$

条件 $\textcircled{2} \sim \textcircled{5}$ を満たす実数 x, y, z が存在

$\Leftrightarrow \frac{t^2 - 1}{t^3} = k$ が異なる 3 実数解をもつ

この実数解が x, y, z

$\Leftrightarrow u = \frac{t^2 - 1}{t^3}$ と $u = k$ が異なる 3 つの

共有点をもつ

右図から

$$-\frac{2\sqrt{3}}{9} < k < 0 \text{ のとき } x < -\sqrt{3}, \quad -\sqrt{3} < y < -1, \quad \frac{\sqrt{3}}{2} < z < 1$$

$$0 < k < \frac{2\sqrt{3}}{9} \text{ のとき } -1 < x < -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad 1 < y < \sqrt{3}, \quad \sqrt{3} < z$$

