

問題

4 k を正の実数とする。曲線 $y=x(x-2)^2$ と放物線 $y=kx^2$ で囲まれた2つの部分の面積が等しくなるような k の値を求めよ。

解説・解答

$y=x(x-2)^2$ と $y=kx^2$ の交点の x 座標は

$$x(x-2)^2=kx^2 \text{ から } x\{x^2-(k+4)x+4\}=0$$

の実数解である。ひとつは $x=0$ であり

$x^2-(k+4)x+4=0$ については、判別式を D として

$$D=(k+4)^2-16=k(k+8)>0 \text{ (} k>0 \text{ より)}$$

であるから、相異なる2実数解をもつ。これらを

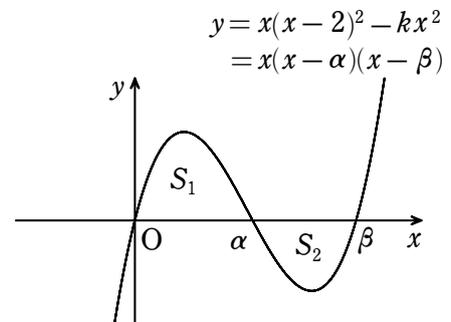
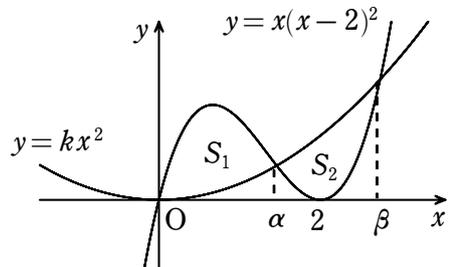
α, β ($\alpha<\beta$) とする。

$$\alpha+\beta=k+4>0 \dots \textcircled{1}, \quad \alpha\beta=4 \dots \textcircled{2}$$

であるから $0<\alpha<\beta$ である。 $y=x(x-2)^2$ と $y=kx^2$ で囲まれた部分のうち、 $0\leq x\leq\alpha$ にある面積を S_1 、 $\alpha\leq x\leq\beta$ にある面積を S_2 とすると

$$S_1=S_2 \Leftrightarrow 2\alpha=\beta \dots\dots(*)$$

②より $\alpha=\sqrt{2}$ 、①より $k=-4+3\alpha=-4+3\sqrt{2}$ …(答)

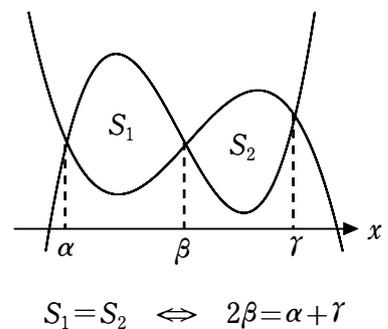


考察

(*)については、図形の対称性から自明のように思われますが、以下のように証明できます。

$x^2-(k+4)x+4=0$ の2解が α, β であることから $x^2-(k+4)x+4=(x-\alpha)(x-\beta)$ を用いて

$$\begin{aligned} S_1-S_2 &= \int_0^\alpha \{x(x-2)^2-kx^2\}dx - \int_\alpha^\beta \{kx^2-x(x-2)^2\}dx \\ &= \int_0^\alpha \{x(x-2)^2-kx^2\}dx + \int_\alpha^\beta \{x(x-2)^2-kx^2\}dx \\ &= \int_0^\beta \{x(x-2)^2-kx^2\}dx = \int_0^\beta x\{x^2-(k+4)x+4\}dx \\ &= \int_0^\beta x(x-\alpha)(x-\beta)dx = \int_0^\beta \{x^3-(\alpha+\beta)x^2+\alpha\beta x\}dx \\ &= \left[\frac{x^4}{4} - (\alpha+\beta)\cdot\frac{x^3}{3} + \alpha\beta\cdot\frac{x^2}{2} \right]_0^\beta \\ &= \frac{\beta^4}{4} - (\alpha+\beta)\cdot\frac{\beta^3}{3} + \alpha\beta\cdot\frac{\beta^2}{2} \\ &= \frac{\beta^3}{12} (3\beta-4\alpha-4\beta+6\alpha) = \frac{\beta^3}{12} (2\alpha-\beta) \end{aligned}$$



したがって $S_1=S_2 \Leftrightarrow 2\alpha=\beta$

3次関数と3次以下の関数のグラフが3点で交わってできる

2つの面積についても、同様なことが成り立ちます。