

問題 1

- (8) 座標平面上の曲線  $C_1: y = -6x^2 + 8tx - 9$  と曲線  $C_2: y = x^3 - 9x^2 + 3x + 6$  が相異なる 3 点で交わり、さらに曲線  $C_1$  と曲線  $C_2$  によって囲まれる 2 つの部分の面積が等しくなるとき、 $t = \boxed{ハ}$  である。このとき 2 つの部分の面積の和は  $\boxed{ヒフヘ}$  である。

解説・解答

$C_1$  と  $C_2$  の交点の  $x$  座標は

$$x^3 - 9x^2 + 3x + 6 = -6x^2 + 8tx - 9$$

の実数解である。これから

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 8tx - 16$$

$$(x-1)^3 = 8tx - 16 \quad \dots \textcircled{1} \quad \leftarrow \text{左辺 立方完成}$$

ここで  $y = (x-1)^3 \quad \dots \textcircled{2}$ ,  $y = 8tx - 16 \quad \dots \textcircled{3}$

とすると、 $C_1$  と  $C_2$  の交点の  $x$  座標は、曲線  $\textcircled{2}$  と直線  $\textcircled{3}$  の交点の  $x$  座標に等しい。 $\textcircled{2}$ ,  $\textcircled{3}$  によって囲まれる 2 つの部分の面積が等しくなるのは、直線  $\textcircled{3}$  が曲線  $\textcircled{2}$  の対称の中心  $(1, 0)$  を通るときだから

$$0 = 8t - 16 \quad \text{から} \quad t = \boxed{2}$$

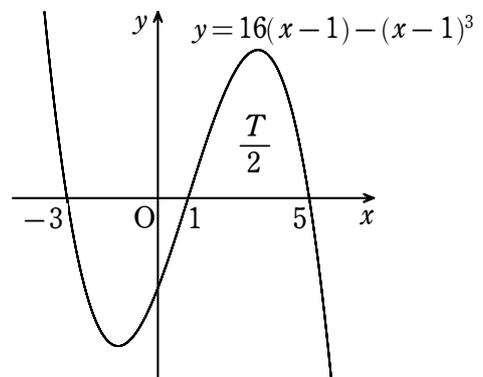
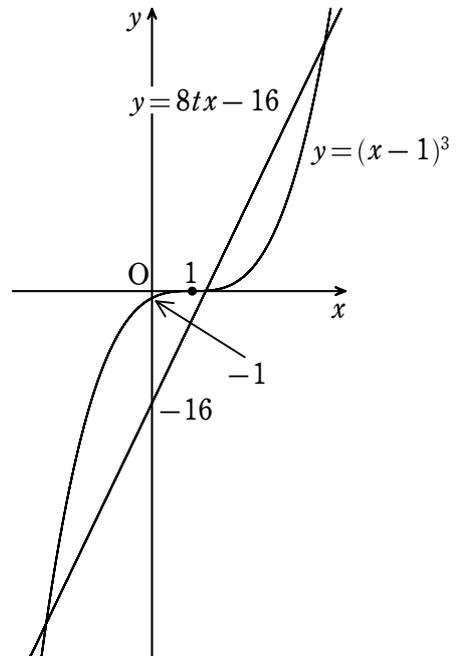
このとき  $\textcircled{1}$  は

$$(x-1)^3 = 16(x-1)$$

$x=1$  以外の解は  $(x-1)^2 = 16$  から  $x=5, -3$  求める面積の和を  $T$  とすると

$$\begin{aligned} \frac{T}{2} &= \int_1^5 \{16(x-1) - (x-1)^3\} dx \\ &= \left[ 16 \cdot \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{4}(x-1)^4 \right]_1^5 \\ &= 8 \cdot 4^2 - \frac{1}{4} \cdot 4^4 = 64 \end{aligned}$$

したがって  $T = \boxed{128}$



考察

シンプソンの公式を用いると、右図のような図形の面積  $S$  は  $f(x)$  が 3 次以下の整関数である限り **厳密**に求まる。

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \frac{2}{3}(\beta - \alpha)f(\mu) \quad \text{ただし} \quad \mu = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

この「2/3 面積公式」は、以下の形の定積分では威力を発揮する。

$$\frac{T}{2} = \int_1^5 (x+3)(x-1)(5-x) dx = \frac{2}{3}(5-1)(3+3)(3-1)(5-3) = 64$$

