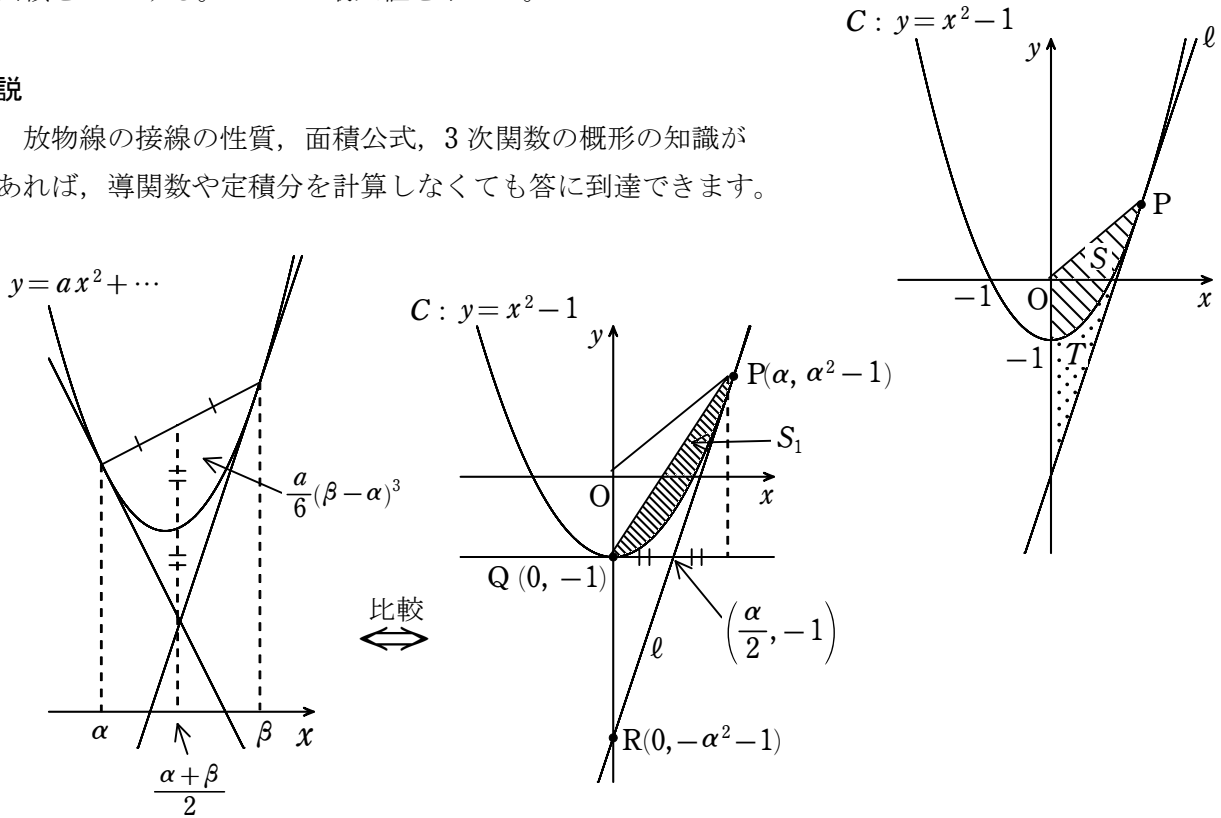


問題

③ 座標平面上において、 $y=x^2-1$  で表される放物線を  $C$  とする。 $C$  上の点  $P$  における  $C$  の接線を  $\ell$  とする。ただし、点  $P$  は  $y$  軸上でないものとする。 $O$  を原点とし、放物線  $C$  と線分  $OP$  および  $y$  軸で囲まれた部分の面積を  $S$ 、放物線  $C$  と接線  $\ell$  および  $y$  軸で囲まれた部分の面積を  $T$  とする。 $S-T$  の最大値を求めよ。

解説

放物線の接線の性質、面積公式、3 次関数の概形の知識があれば、導関数や定積分を計算しなくても答に到達できます。



放物線  $C$  は  $y$  軸に関して対称だから点  $P$  は  $x > 0$  の範囲にあるものとして考えてよい。  
 $P$  の座標を  $(\alpha, \alpha^2 - 1)$  ( $\alpha > 0$ )、 $C$  の頂点を  $Q(0, -1)$  とする。 $P$  と  $Q$  における  $C$  の 2 つの接線の交点は  $(\frac{\alpha}{2}, -1)$  であり、接線  $\ell$  と  $y$  軸の交点は  $R(0, -\alpha^2 - 1)$  となる。

線分  $PQ$  と放物線  $C$  で囲まれた部分の面積を  $S_1$  とすると、面積公式から  $S_1 = \frac{1}{6}\alpha^3$

$$S - T = (\triangle POQ - S_1) - (\triangle PQR - S_1) = \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \alpha - \frac{1}{6}\alpha^3\right) - \left(\frac{1}{2}\alpha^2 \cdot \alpha - \frac{1}{6}\alpha^3\right)$$

$$= \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{6}\alpha^3 = \frac{1}{6}\alpha(3 - \alpha^2)$$

$S - T$  が最大となるのは  $\alpha = 1$  のときで、最大値は

$$\frac{1}{2} \cdot 1 - \frac{1}{6} \cdot 1^3 = \frac{1}{3}$$

