

解説解答

空欄のみの問題なので、なるべく効率の良い解法を目指しました。更に良い解法があれば教えてください。

問 1

- (1) 因数を展開したときの x^3 の係数は $\boxed{\text{ア}} + \boxed{\text{ウ}}$ で、 $\boxed{\text{ア}} < \boxed{\text{ウ}}$ だから、 $\boxed{\text{ア}} = -a$ 、 $\boxed{\text{ウ}} = a$ ($a > 0$) とおく。また $\boxed{\text{イ}} = b$ 、 $\boxed{\text{エ}} = c$ とすると

$$x^4 - 13x^2 + 18x - 5 = (x^2 - ax + b)(x^2 + ax + c)$$

両辺の係数を比較して

$$-a^2 + b + c = -13 \quad \dots \text{①}, \quad a(b - c) = 18 \quad \dots \text{②}, \quad bc = -5 \quad \dots \text{③}$$

$a > 0$ だから ② から $b - c > 0$ 、これと ③ から $(b, c) = (1, -5)$ または $(5, -1)$

いずれの場合も $b - c = 6$ よって $a = 3$ 、① から $b + c = -4$ 、よって $(b, c) = (1, -5)$

以上から $(x^2 + \boxed{-3}x + \boxed{1})(x^2 + \boxed{3}x + \boxed{-5})$

- (2) $\sqrt{x+510} = y$ 、 $\sqrt{x+822} = z$ とおくと $y+z=52 \quad \dots \text{④}$

$$y^2 = x+510, \quad z^2 = x+822 \quad \text{から} \quad z^2 - y^2 = (z-y)(z+y) = 312 \quad \dots \text{⑤}$$

よって $z - y = 6$ 、これと ④ から $z = 29$ 、 $x = z^2 - 822 = 841 - 822 = \boxed{19}$

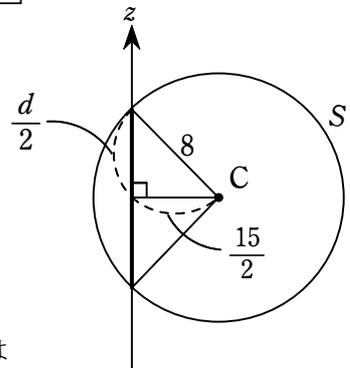
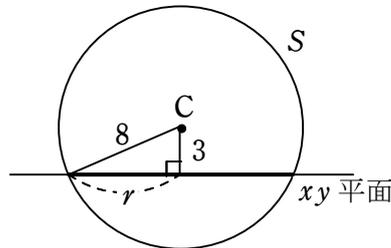
<感想> $\sqrt{\quad}$ をはずすために両辺を平方することは必要ありませんでした。

- (3) $A\left(-\frac{\sqrt{35}}{2}, 5, 10\right)$ 、 $B\left(\frac{\sqrt{35}}{2}, 10, -4\right)$ とすると、AB の中点 $C\left(0, \frac{15}{2}, 3\right)$ が球面 S

の中心で $AB = \sqrt{35 + 5^2 + 14^2} = 16$ から S の半径は $R = 8$

S が xy 平面を切り取る領域は円であり、その半径を r とすると、 C と xy 平面の距離は

3 であるから $r^2 = 8^2 - 3^2 = 55$ 、よって求める面積は $\pi r^2 = \boxed{55} \pi$



S が z 軸を切り取る線分の長さを d とすると、 C と z 軸の距離は

$$\frac{15}{2} \text{ であるから } \frac{d}{2} = \sqrt{8^2 - \left(\frac{15}{2}\right)^2}, \text{ よって } d = \sqrt{16^2 - 15^2} = \sqrt{\boxed{31}}$$

問2

$f(x)=|x-a|+|x-b|+|x-c|$ ($a < b < c$) のグラフは折れ線で、関数値

$$f(a)=(b-a)+(c-a)$$

$$f(b)=(b-a)+(c-b)=c-a$$

$$f(c)=(c-b)+(c-a)$$

および途中の傾き (x の係数) を考えると右図になる。

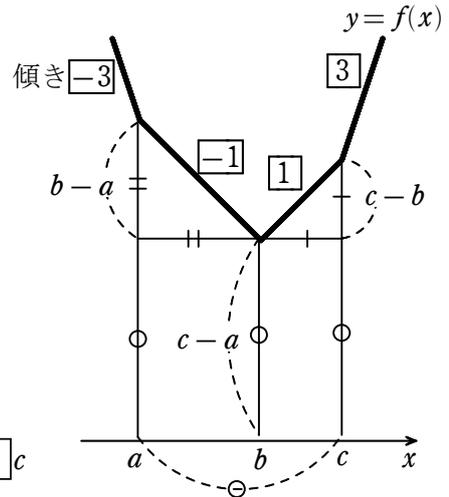
$5x+4f(x)$ の傾きは

$$x \leq a \text{ で } 5+4 \times (-3) = -7$$

$$a \leq x \leq b \text{ で } 5+4 \times (-1) = 1$$

$5x+4f(x)$ は $x=a$ で減少から増加へ変わるから、 $x=a$ で最小となり最小値は

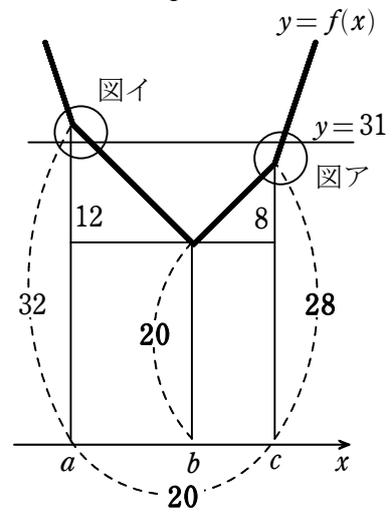
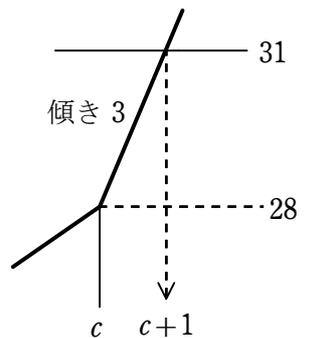
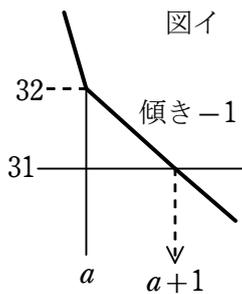
$$5a+4f(a)=5a+4(b+c-2a) = \boxed{-3}a + \boxed{4}b + \boxed{4}c$$



$f(x)$ の最小値が $f(b)=(b-a)+(c-b)=c-a=20$

$f(c)=(c-b)+(c-a)=28$ から $c-b=8$, $b-a=12$

よって $f(a)=(b-a)+(c-a)=12+20=32$



$f(10)=31$ であるから、図ア から $c+1=10$ すなわち $(a+20)+1=10$ よって $a = \boxed{-11}$

図イ から $a+1=10$ よって $a = \boxed{9}$

問3

(1) $\vec{AB}=\vec{b}$, $\vec{AC}=\vec{c}$, $\vec{AP}=\vec{p}$ とかく。 $\vec{b} \cdot \vec{c} = 6 \cdot 4 \cdot \frac{1}{4} = 6$

AP は $\triangle ABC$ の外接円の直径だから $AB \perp BP$, $AC \perp CP$

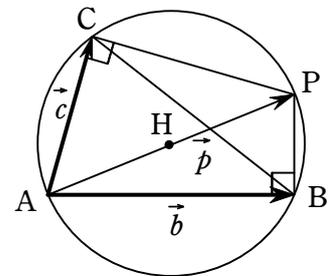
$\vec{p} = x\vec{b} + y\vec{c}$ とすると、

$$\vec{AB} \cdot \vec{BP} = \vec{b} \cdot (\vec{p} - \vec{b}) = \vec{b} \cdot (x\vec{b} + y\vec{c}) - |\vec{b}|^2 = 0$$

$$\vec{AC} \cdot \vec{CP} = \vec{c} \cdot (\vec{p} - \vec{c}) = \vec{c} \cdot (x\vec{b} + y\vec{c}) - |\vec{c}|^2 = 0$$

これらから $36x + 6y = 36$, $6x + 16y = 16$

連立して解いて $x = \frac{8}{9}$, $y = \frac{2}{3}$ すなわち $\vec{p} = \frac{\boxed{8}}{\boxed{9}}\vec{b} + \frac{\boxed{2}}{\boxed{3}}\vec{c}$



問3

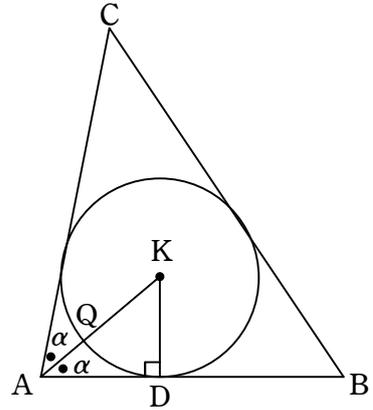
(2) 辺 AB と内接円との接点を D とする。線分の比 $\frac{AQ}{AK}$ を

求めればよい。
$$\frac{AQ}{AK} = \frac{AK - KQ}{AK} = \frac{AK - KD}{AK} = 1 - \frac{KD}{AK}$$

ここで $\angle CAB = 2\alpha$ とすれば、 $\angle KAD = \alpha$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{5} \right) = \frac{2}{5} \quad \text{から} \quad \sin \alpha = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

したがって
$$\frac{AQ}{AK} = 1 - \frac{KD}{AK} = 1 - \sin \alpha = \frac{5}{5} - \frac{\sqrt{10}}{5}$$



<感想> ベクトルとみえて三角関数の問題でした。AB, AC の値は使わないんですね。

問4

方程式 $z^3 - 5z^2 + kz - 5 = 0$ の3つの解とそれらが表す点を $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$ とする。3点は三角形をつくるから、 α, β, γ は虚数をふくむ。実数係数の3次方程式が虚数解をもつとき、2つは共役な虚数で、1つは実数である。そこで

$$\alpha = a + bi, \quad \beta = a - bi, \quad \gamma = c \quad (a, b, c \text{ は実数}, b > 0)$$

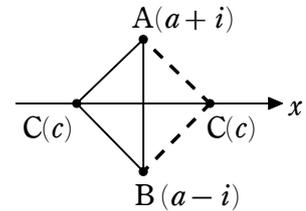
とおく。 $\triangle ABC$ において AB は実軸に垂直、C は実軸上だから直角になるのは $\angle ACB$ であり、斜辺 $AB = 2$ から $b = 1, c = a + 1$ または $c = a - 1$ となる。3次方程式の解と係数の関係から

$$\alpha + \beta + \gamma = 2a + c = 5 \quad \dots \textcircled{1}, \quad \alpha\beta\gamma = (a^2 + 1)c = 5 \quad \dots \textcircled{2}$$

$c = a + 1$ のとき $\textcircled{1}$ から $a = \frac{4}{3}, c = \frac{7}{3}$, これらは $\textcircled{2}$ を満たさない。

$c = a - 1$ のとき $a = 2, c = 1$ で $\textcircled{2}$ を満たす。このとき

$$k = \alpha\beta + (\alpha + \beta)\gamma = (a^2 + 1) + 2ac = \boxed{9}, \quad \triangle ABC = \boxed{1}$$



問5

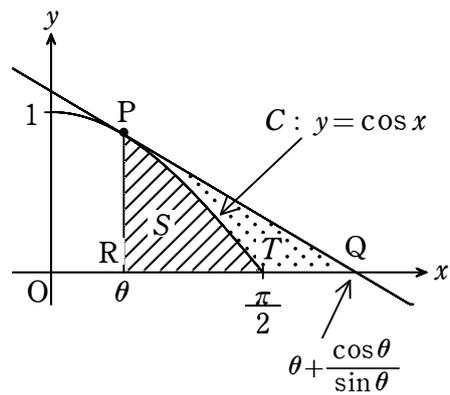
曲線 $C: y = \cos x$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) 上の点 $P(\theta, \cos \theta)$

における接線 l は、 $y' = -\sin x$ から

$$y - \cos \theta = -\sin \theta (x - \theta)$$

x 軸との交点 Q の x 座標は、 $\theta \neq 0$ のとき $y = 0$ として

$$x = \theta + \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$



(1) $\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき、 l と x 軸との交点の x 座標は $\frac{\pi + \boxed{4}}{\boxed{4}}$

(2) 点 $R(\theta, 0)$ とする。 C と l と x 軸で囲まれた部分の面積は $T = 1$, C と PR と x 軸で囲ま

れた部分の面積を S とすると
$$S = \int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \left[\sin x \right]_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} = 1 - \sin \theta$$

$$S + T = \triangle PRQ \quad \text{すなわち} \quad 1 - \sin \theta + 1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \cdot \cos \theta$$

これから $\sin^2 \theta - 4\sin \theta + 1 = 0, 0 \leq \sin \theta \leq 1$ だから $\sin \theta = \boxed{2} - \sqrt{\boxed{3}}$