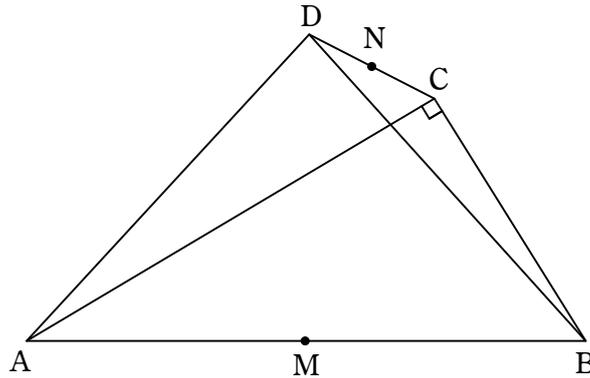


問題 (2011年日本大学第二高校)

下の図のように、底辺 AB が共通な直角三角形 ABC と二等辺三角形 ABD がある。
 $\angle C=90^\circ$, $AD=BD=12$, $CD=4$ とする。AB の中点を M, CD の中点を N とするとき、
 次の各問いに答えよ。



- (1) $AB=16$ のとき、二等辺三角形 ABD の面積を求めよ。
- (2) CM^2+DM^2 の値を求めよ。
- (3) MN の長さを求めよ。

解答

(1) $AB=16$ のとき, $AM=8$, $DM=\sqrt{12^2-8^2}=\sqrt{4^2\cdot 3^2-4^2\cdot 2^2}=4\sqrt{9-4}=4\sqrt{5}$

$$\triangle ABD = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 4\sqrt{5} = 32\sqrt{5}$$

- (2) $\angle ACB=90^\circ$ だから C は AB を直径とする円周上にあり $CM=AM$

$$CM^2+DM^2=AM^2+DM^2=AD^2=12^2=144$$

- (3) DM に C から垂線をひいて交点を H とし、

$MH=a$, $DH=b$, $CH=c$ とする。

$$AM^2=CM^2=a^2+c^2$$

$$CD^2=b^2+c^2=16$$

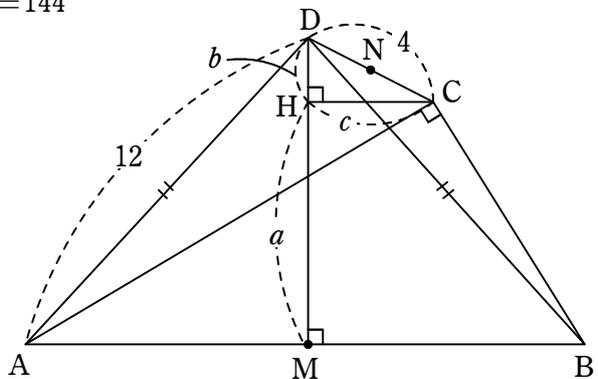
$$AD^2=CM^2+DM^2=a^2+c^2+(a+b)^2$$

$$=2a^2+2ab+b^2+c^2=144$$

から $a^2+ab=\frac{144-16}{2}=64$

$$MN^2=\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{c}{2}\right)^2=a^2+ab+\frac{b^2+c^2}{4}=64+\frac{16}{4}=68$$

よって $MN=\sqrt{68}=2\sqrt{17}$



感想

(3) は中学の教育範囲を越えるのではないかと、というコメントを見たので、ピタゴラスの定理でできる方法を考えてみました。試験時間内に気付くのは難しいでしょうが。