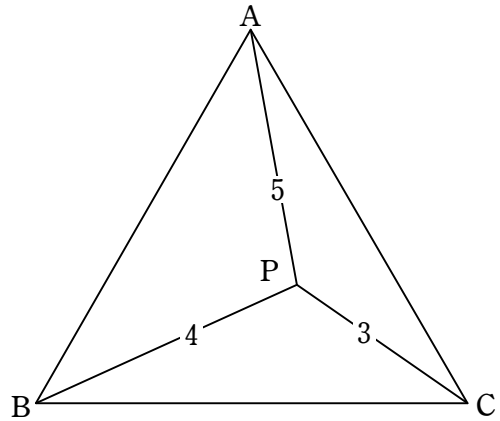


問題 (お茶の水女子大学附属高校, 出題年度不明)

正三角形 ABC とその内部に点 P があり,
PA=5, PB=4, PC=3 のとき, 次の問いに答えよ。

- (1) 三角形 PBC と合同な三角形 QBA を
三角形 ABC の外側に作図せよ。
- (2) 四角形 PAQB の面積を求めよ。
- (3) 正三角形 ABC の面積を求めよ。



解説

- (1) 略
- (2) $\triangle PAQ$ は直角三角形, $\triangle PQB$ は
正三角形だから, 求める面積は

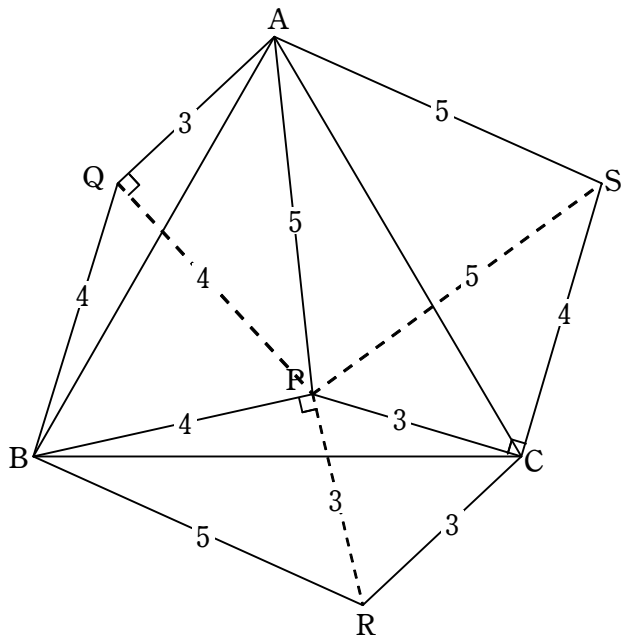
$$\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 4^2 = 6 + 4\sqrt{3}$$

- (3) (1) に習い右図のように $\triangle RCB$, $\triangle SAC$
をつくると

$$2\triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 \times 3 + \frac{\sqrt{3}}{4} (4^2 + 3^2 + 5^2)$$

$$= 18 + \frac{25\sqrt{3}}{2}$$

よって $\triangle ABC = 9 + \frac{25\sqrt{3}}{4}$



感想

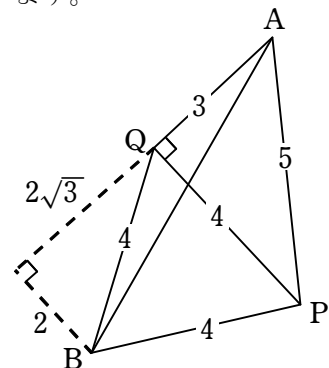
この問題を初めてみたとき, 問題図から正三角形 ABC の面積を求めよ, というものでした。パズルとしてはとても興味深いのですが, 入試に出題して支障があるのではないかとというのが, 第一印象でした。実際は, 小問を用いた誘導があるので, 入試問題として成立していると思います。別解を少し考えてみましたが, 改めて上の解法は見事だと思います。

ちなみに右図から

$$AB^2 = (3 + 2\sqrt{3})^2 + 2^2 = 25 + 12\sqrt{3}$$

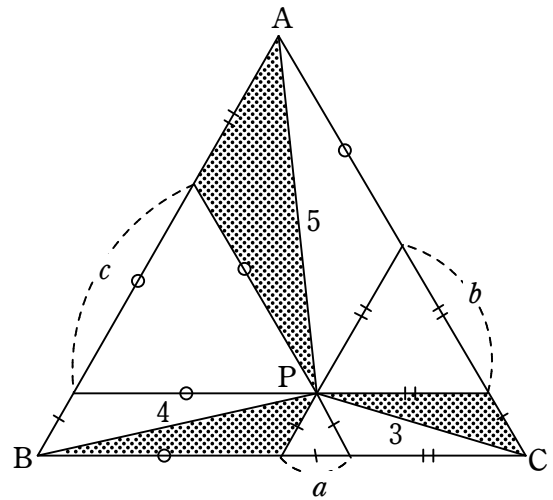
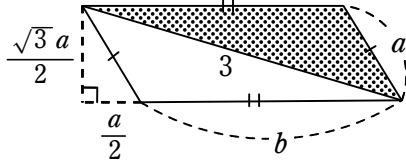
$$\triangle ABC = \frac{\sqrt{3}}{4} AB^2 = \frac{25\sqrt{3}}{4} + 9$$

とするのが, 最短の解答のように思えます。 $\angle AQP = 90^\circ$
がいい位置にあります。出題者はなかなか親切ですね。



別解

右図のように、P を通って各辺に平行な 3 本の直線をひくと、正三角形 ABC は 3 つの正三角形と 3 つの平行四辺形 (内角が 60° と 120°) に分けられる。また、図のように長さ a, b, c をとる。PA, PB, PC との関係については下図を用いる。



$$\left(\frac{a}{2} + b\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}a}{2}\right)^2 = 3^2 \quad \text{から} \quad PC^2 = a^2 + ab + b^2 = 9 \quad \dots\dots ①$$

また上の網掛けの三角形の面積は $\frac{\sqrt{3}}{4}ab$, 同様にして

$$PA^2 = b^2 + bc + c^2 = 25 \quad \dots\dots ②$$

$$PB^2 = c^2 + ca + a^2 = 16 \quad \dots\dots ③$$

$$① + ② + ③ \quad \text{から} \quad 2(a^2 + b^2 + c^2) + (ab + bc + ca) = 50 \quad \dots\dots ④$$

右上図の網掛けの 3 つの三角形を集めたものが右図, これから

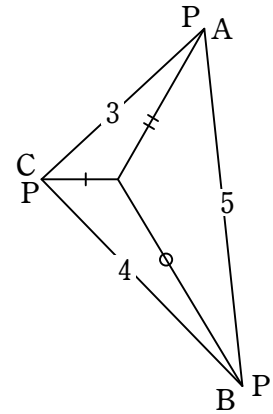
$$\frac{\sqrt{3}}{4}(ab + bc + ca) = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \quad \text{よって}$$

$$ab + bc + ca = 8\sqrt{3} \quad \dots\dots ⑤$$

$$④ \quad \text{から} \quad a^2 + b^2 + c^2 = 25 - 4\sqrt{3}$$

したがって

$$\begin{aligned} \Delta ABC &= \frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{\sqrt{3}}{2}(ab + bc + ca) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}(25 - 4\sqrt{3}) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 8\sqrt{3} = \frac{25\sqrt{3}}{4} + 9 \end{aligned}$$



感想

①, ②, ③ から辺の長さ $d = a + b + c$ を求めるために, a, b, c を消去していくと, d^2 の 2 次方程式を導くことができますが, 技巧的で美しくありません。やはり, 図形の力を借りることが必要なようです。