

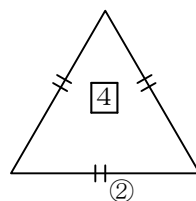
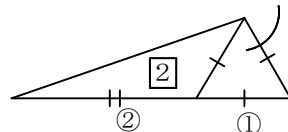
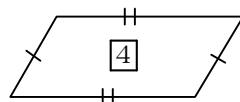
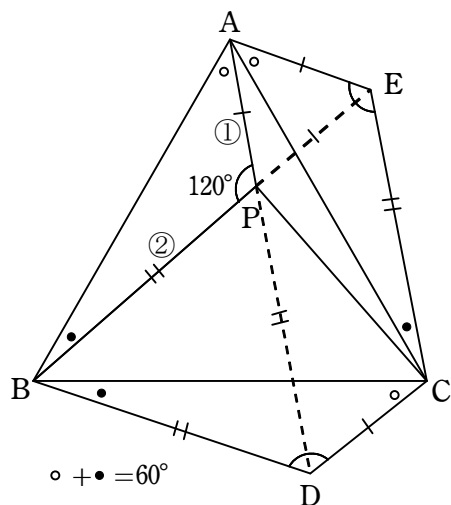
問題 (2019年 灘中学)

図で、三角形 ABC は正三角形で、面積は 1 cm^2 です。

PB の長さが PA の長さの 2 倍のとき、三角形 CAP の

面積は cm^2 です。

略解



正三角形 ABC の外側に点 D, E を $\triangle DCB \equiv \triangle EAC \equiv \triangle PAB$ となるようにとる。

$\triangle PBD$ は $BP = BD$, $\angle PBD = 60^\circ$ だから正三角形、同様に $\triangle PEA$ も正三角形。

$\triangle PEA$ の面積を S とすると、 $\triangle PAB = 2S$, $\triangle PBD = 4S$, $\square PDCE = 2\triangle PAB = 4S$,

また、AP と EC は $\angle EAP = 60^\circ$, $\angle AEC = 120^\circ$ だから平行、よって $\triangle CAP = \triangle EAP = S$ したがって

$$\triangle ABC = \triangle PAB + \triangle PEA + \triangle PBD + \square PDCE - \triangle DCB - \triangle EAC$$

$\square PDCE - \triangle DCB - \triangle EAC = 0$ であるから

$$\triangle ABC = \triangle PAB + \triangle PEA + \triangle PBD = 2S + S + 4S = 7S$$

$\triangle CAP$ の面積は $\triangle ABC$ の面積の $\frac{1}{7}$ だから $\frac{1}{7}$ cm^2 。

感想 一般に $PA = a$, $PB = b$ とすると $\triangle ABC = \frac{\sqrt{3}}{4} (a^2 + ab + b^2)$ となります。

下右図の分割をネットで見ました、シンプルかつ美しいですね。

