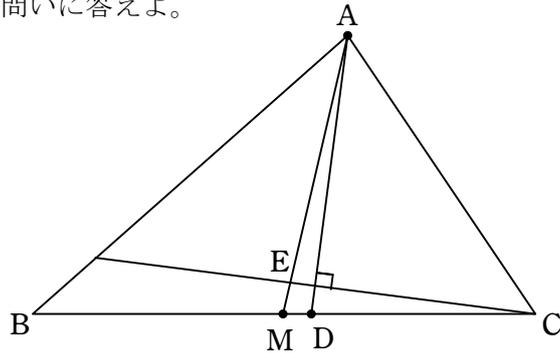


問題 (2014年 巣鴨高校)

下図のような、 $AB=5$, $BC=6$, $CA=4$ である $\triangle ABC$ がある。辺 BC の中点を M , $\angle A$ の 2 等分線と辺 BC の交点を D とする。また、 C から直線 AD に垂線を引き、この垂線と直線 AM の交点を E とするとき、次の各問いに答えよ。

- (1) DM の長さを求めよ。
- (2) $ME : EA$ を求めよ。
- (3) DE の長さを求めよ。



解説解答

M は BC の中点だから $BM=MC=3$

AD は $\angle A$ の 2 等分だから

$$BD : DC = AB : AC = 5 : 4$$

$$BD = 6 \times \frac{5}{9} = \frac{10}{3}, \quad DC = 6 \times \frac{4}{9} = \frac{8}{3}$$

直線 CE と AD , AB の交点をそれぞれ F , G とする。 $\triangle AFC \cong \triangle AFG$ から

$$AG=4, \quad GB=1$$

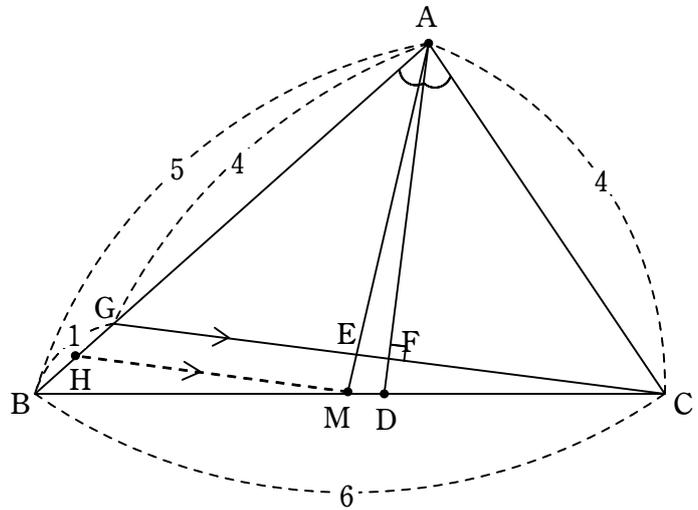
$$(1) \quad DM = MC - DC = 3 - \frac{8}{3} = \frac{1}{3}$$

(2) M から CG に平行に直線をひき、
 AB との交点を H とすると $GH=HB$

$$\text{よって } ME : EA = HG : GA = \frac{1}{2} : 4 = 1 : 8$$

(3) $\triangle MCA$ において $ME : EA = 1 : 8$, $MD : DC = \frac{1}{3} : \frac{8}{3} = 1 : 8$ から $DE \parallel CA$

$$DE : CA = MD : MC = 1 : 9 \quad \text{よって} \quad DE = 4 \times \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$$



感想

小問の流れを注意深くたどって、 $DE \parallel CA$ に気付いてくれることを問題作成者は期待したと思われる。それにしても、このような性質をよく知っている／気付いているのがすごいです。一般に $AB=c$, $AC=b$ ($c > b$) とすると、上図で

$$HG = \frac{c-b}{2}, \quad GA = b, \quad MD : DC = \frac{c+b}{2} - b : b = \frac{c-b}{2} : b$$

となるところが、ヒントになったのでしょうか。