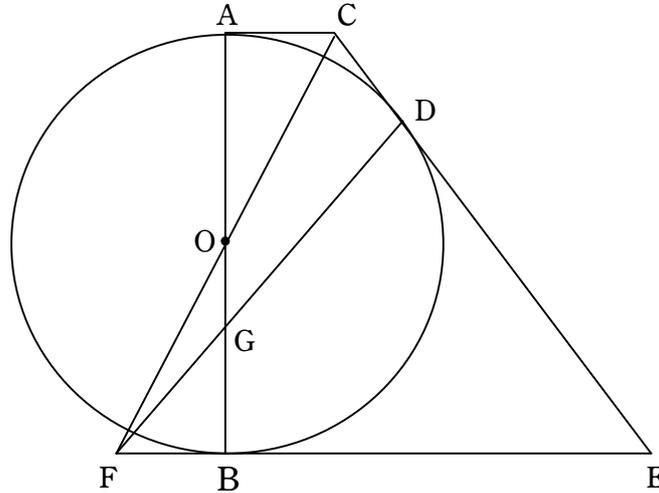


問題 (2015年 宮城県) (小問一部省略, 問題文一部変更)

図のような, 長さが 12 cm の線分 AB を直径とする円 O があります。点 A を通る円 O の接線をひき, その接線上に AC=3 cm となるように点 C をとり, 点 C と点 O を結びます。また, 点 C から円 O に接線 AC とは異なる接線をひき, 円 O との接点を D とします。さらに, 点 B を通る円 O の接線をひき, 接線 CD との交点を E とします。直線 CO と直線 EB との交点を F とし, 点 D と点 F を結びます。線分 DF と線分 AB との交点を G とするとき, 四角形 OGDC の面積を求めなさい。



略解 (単位略)

D から OA に垂線をひき, 交点を H とし, DA と OC の交点を I とする。また $\triangle OAC \cong \triangle ODC \cong \triangle OBF$
 四角形 OGDC = $\triangle ODC + \triangle OGD$ であり,

$$\triangle ODC = \triangle OAC = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 = 9$$

だから, OG と DH の長さを求めればよい。

$$\triangle OAC \text{ について } OA : AC : OC = 2 : 1 : \sqrt{5}$$

$$\triangle OIA \sim \triangle OAC \text{ から } AI = \frac{6}{\sqrt{5}}, AD = \frac{12}{\sqrt{5}}$$

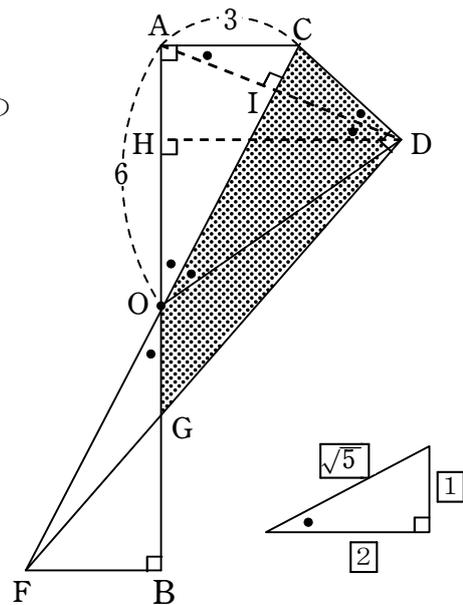
$$\triangle DHA \text{ において } DH = AD \times \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{24}{5} \dots \textcircled{1}$$

$$AH = AD \times \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{12}{5}, HB = AB - AH = 12 - \frac{12}{5} = \frac{48}{5}$$

$$\triangle GFB \sim \triangle GDH \text{ から } GB : GH = FB : DH = 3 : \frac{24}{5} = 5 : 8$$

$$GB = HB \times \frac{5}{13} = \frac{48}{13} \text{ よって } OG = OB - GB = 6 - \frac{48}{13} = \frac{30}{13} \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ から } \triangle OGD = \frac{1}{2} \cdot \frac{24}{5} \cdot \frac{30}{13} = \frac{72}{13} \text{ したがって 四角形 OGDC} = 9 + \frac{72}{13} = \frac{189}{13}$$



感想 相似な直角三角形の辺の比をうまく使いたいですね。もっと簡明なのがあるかも知れません。