

整角四角形問題（三角関数による解法）

右の図において、 a, b, c, d の4つの角の大きさから角 x の大きさを求める方法を考えます。

△ABC において正弦定理を用いると

$$\frac{AB}{\sin c} = \frac{BC}{\sin(180^\circ - a - b - c)} \quad \text{から} \quad AB = \frac{\sin c}{\sin(a + b + c)} BC$$

△DBC において正弦定理を用いると、同様にして

$$DB = \frac{\sin(c + d)}{\sin(b + c + d)} BC$$

これから

$$\frac{DB}{AB} = \frac{\sin(a + b + c) \sin(c + d)}{\sin c \sin(b + c + d)}$$

さらに △ABD において正弦定理を用いると

$$\frac{DB}{AB} = \frac{\sin(x + a)}{\sin x} = \frac{\sin x \cos a + \cos x \sin a}{\sin x} = \cos a + \frac{\sin a}{\tan x}$$

上の2式から

$$\frac{\sin a}{\tan x} = \frac{\sin(a + b + c) \sin(c + d)}{\sin c \sin(b + c + d)} - \cos a$$

となり、ここで仮に右辺第1項が

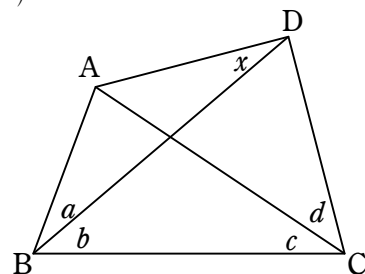
$$\frac{\sin(a + b + c) \sin(c + d)}{\sin c \sin(b + c + d)} = \frac{\sin(\theta + a)}{\sin \theta} \quad \dots\dots (*)$$

のように変形されたとすると

$$\frac{\sin a}{\tan x} = \frac{\sin(\theta + a)}{\sin \theta} - \cos a = \frac{\sin \theta \cos a + \cos \theta \sin a}{\sin \theta} - \cos a = \frac{\sin a}{\tan \theta} \quad \text{から}$$

$$x = \theta$$

となります。



上の解法は a, b, c, d から x を求める方法というよりは、 x を知った上で等式 (*) を証明することが整角四角形問題を解くことになる、ということを表しています。この問題は一般には、補助線を工夫して幾何学的に解くことに非常な面白味がありますが、それとは別に三角関数の公式を操って等式を証明することも、負けず興味深いところがあるように思われます。

等式の変形には次の倍角公式が利用できます。

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \sin \alpha \sin(90^\circ - \alpha)$$

$$\sin 3\alpha = 4 \sin \alpha \sin(60^\circ - \alpha) \sin(60^\circ + \alpha)$$

たとえば

$$\sin 20^\circ = 2 \sin 10^\circ \sin 80^\circ, \quad \sin 40^\circ = 2 \sin 20^\circ \sin 70^\circ, \quad \sin 80^\circ = 2 \sin 40^\circ \sin 50^\circ$$

$$\sin 30^\circ = 4 \sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ \quad \text{から} \quad \sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ = \frac{1}{8}$$

$$\sin 60^\circ = 4 \sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ \quad \text{から} \quad \sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8} \quad \text{など}$$

公式は $P = \frac{\sin(a+b+c)\sin(c+d)}{\sin c \sin(b+c+d)}$ とおくと $\frac{\sin a}{\tan x} = P - \cos a$ となる

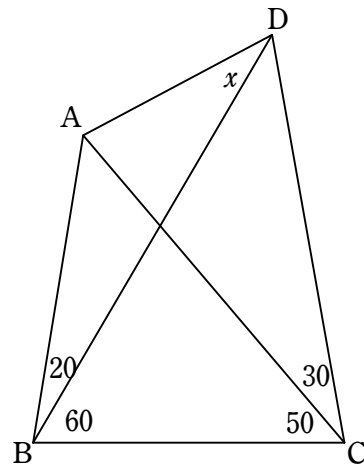
例題 1 (単位°は省略)

$$P = \frac{\sin 130 \sin 80}{\sin 50 \sin 140} = \frac{\sin 50 \cdot 2 \sin 40 \cos 40}{\sin 50 \sin 40}$$

$$= \frac{\cos 40}{\frac{1}{2}} = \frac{\sin 50}{\sin 30}$$

$$\frac{\sin 20}{\tan x} = \frac{\sin 50}{\sin 30} - \cos 20 = \frac{\sin 20 \cos 30}{\sin 30}$$

よって $x = 30$



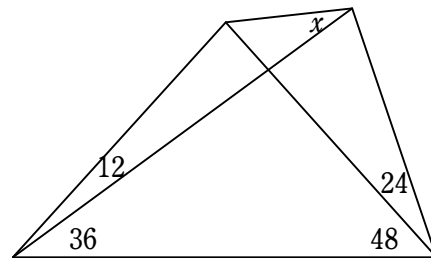
例題 2

$$P = \frac{\sin 96 \sin 72}{\sin 48 \sin 108} = \frac{2 \sin 48 \cos 48 \sin 72}{\sin 48 \sin 72}$$

$$= \frac{\cos 48}{\frac{1}{2}} = \frac{\sin 42}{\sin 30}$$

$$\frac{\sin 12}{\tan x} = \frac{\sin 42}{\sin 30} - \cos 12 = \frac{\sin 12 \cos 30}{\sin 30}$$

よって $x = 30$



例題 3

$$P = \frac{\sin 60 \sin 50}{\sin 20 \sin 80}$$

3 倍角の公式から

$$\frac{\sqrt{3}}{8} = \sin 20 \sin 40 \sin 80$$

$$\frac{1}{8} = \cos 20 \cos 40 \cos 80 = \sin 10 \sin 50 \sin 70$$

この 2 式から $\sqrt{3} = \frac{\sin 20 \sin 40 \sin 80}{\sin 10 \sin 50 \sin 70}$

$$P = \frac{\sin 20 \sin 40 \sin 80}{\sin 10 \sin 50 \sin 70} \cdot \frac{\sin 50}{2 \sin 20 \sin 80} = \frac{\sin 40}{2 \sin 10 \sin 70}$$

$$= \frac{2 \sin 20 \cos 20}{2 \sin 10 \cos 20} = \frac{\sin 20}{\sin 10}$$

$$\frac{\sin 10}{\tan x} = \frac{\sin 20}{\sin 10} - \cos 10 = \frac{\sin 10 \cos 10}{\sin 10}$$

よって $x = 10$

