

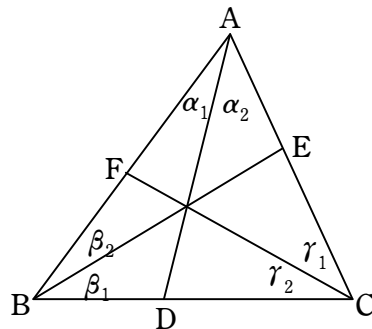
整角四角形問題（三角関数による解法）別公式

チェバの定理の三角関数による表現

三角形 ABC の辺 BC, CA, AB 上に点 D, E, F があるとき、
3つの直線 AD, BE, CF が1点で交わるならば

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1$$

が成り立ち、またその逆も成り立ちます。この上式を右図の角を用いて書き換えると



$$\frac{BD}{DC} = \frac{\triangle ABD}{\triangle ADC} = \frac{\frac{1}{2}AB \cdot AD \sin \alpha_1}{\frac{1}{2}AD \cdot AC \sin \alpha_2} = \frac{AB \sin \alpha_1}{AC \sin \alpha_2}$$

他の比も同様にして

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = \frac{AB \sin \alpha_1}{AC \sin \alpha_2} \cdot \frac{BC \sin \beta_1}{BA \sin \beta_2} \cdot \frac{CA \sin \gamma_1}{CB \sin \gamma_2} = \frac{\sin \alpha_1 \sin \beta_1 \sin \gamma_1}{\sin \alpha_2 \sin \beta_2 \sin \gamma_2}$$

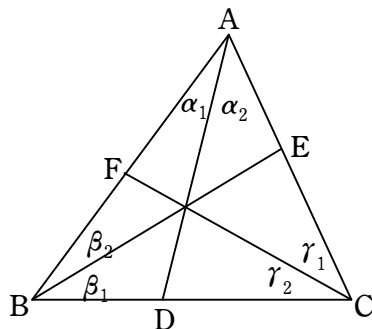
すなわち、チェバの定理は三角関数を用いて以下のように表現されます。

—— チェバの定理（三角関数による表現） ——

3つの直線 AD, BE, CF が1点で交わるならば

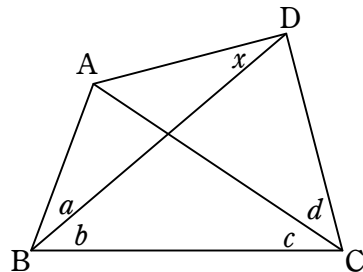
$$\frac{\sin \alpha_1 \sin \beta_1 \sin \gamma_1}{\sin \alpha_2 \sin \beta_2 \sin \gamma_2} = 1$$

が成り立ち、またその逆も成り立つ。



整角四角形問題（三角関数による解法）別公式

上の定理を用いて「整角四角形問題1」で求めた公式
とは別に、右の図において、 a, b, c, d の4つの角の
大きさから角 x の大きさを求める方法を考えます。



ここでは $a < d$ とする。このとき $\angle BAC > \angle BDC$ だから
三角形 DBC の外接円を O とすると、頂点 A は円 O の内部にある。BA, CA, DA を延長し円 O
との交点を E, F, G とする。三角形 DFB について上のチェバの定理を用いる。

$$\angle FDG = \angle FDB - \angle GDB = \angle FCB - \angle GDB = c - x$$

$$\angle BFC = \angle BDC = 180^\circ - b - c - d, \quad \angle DFC = \angle DBC = b$$

$$\angle FBE = \angle FBD - \angle EBD = \angle FCD - \angle EBD = d - a$$

3つの直線 DG, FC, BE が1点 A で交わるから

$$\frac{\sin \angle FDG}{\sin \angle BDG} \cdot \frac{\sin \angle BFC}{\sin \angle DFC} \cdot \frac{\sin \angle DBE}{\sin \angle FBE} = 1$$

すなわち $\frac{\sin(c-x)}{\sin x} \cdot \frac{\sin(b+c+d)}{\sin b} \cdot \frac{\sin a}{\sin(d-a)} = 1$

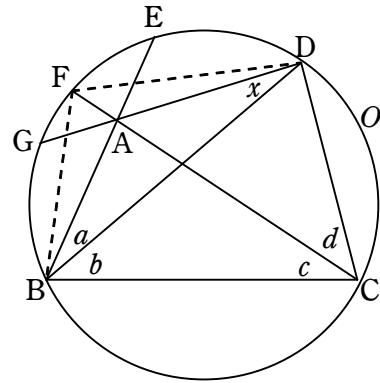
これから $\frac{\sin(c-x)}{\sin x} = \frac{\sin b \sin(d-a)}{\sin a \sin(b+c+d)} \dots\dots (*)$

ここで右边が

$$\frac{\sin b \sin(d-a)}{\sin a \sin(b+c+d)} = \frac{\sin(c-\theta)}{\sin \theta} \dots\dots (**)$$

と変形されたならば $x=\theta$ となる。

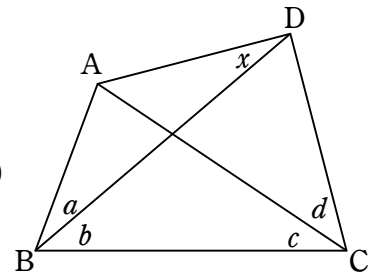
(*) は x を求める公式というよりは, $x=\theta$ の導出を等式 (**) の証明に置き換えたことを表しています。



——整角四角形問題（三角関数による解法）別公式——

$$x=\theta \Leftrightarrow \frac{\sin b \sin(d-a)}{\sin a \sin(b+c+d)} = \frac{\sin(c-\theta)}{\sin \theta}$$

$$\Leftrightarrow \sin \theta \sin b \sin(d-a) = \sin(c-\theta) \sin a \sin(b+c+d)$$



整角四角形問題の成立条件

上の解法は a, b, c, d から x を求める方法というよりは, x を知った上で等式 (**) を証明することが整角四角形問題を解くことになる, ということでした。この問題は一般には, 補助線を工夫して幾何学的に解くことに非常な面白味がありますが, それとは別に三角関数の公式を操って等式を証明することも, 負けず興味深いところがあるように思われます。

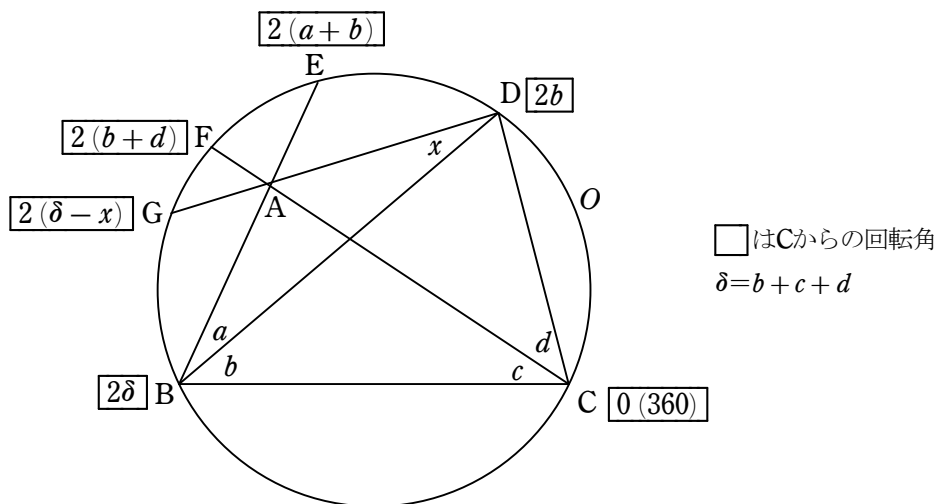
この問題については, 長年抱いていた疑問がありました。それは, a, b, c, d の値によって x が整数値をとる場合ととらない場合がある, ということです。それにはどんな条件が関係しているのが疑問でした。上の解法の過程で気付いたことがあります。正 n 角形とその外接円を考

えたとき, 各辺の弧に対する中心角は $\frac{2\pi}{n}$, 円周角は $\frac{\pi}{n}$ だから, 辺や対角線のなす角はすべて

$\frac{\pi}{n}$ の整数倍になります。正 n 角形の頂点を 6 つ選びそれらを結ぶ 3 本の対角線が内部の 1 点で

交わるならば, その交点と円周上の 3 点で四角形をつくれれば自明でない整角四角形問題ができるはずです。たとえば 10° 単位の整角問題は 200 個ほどあってリストが作られています, それらは正 18 角形の辺と対角線からできる図形のなかに見つかるのではないのでしょうか。これは証明できてはいませんが, そうではないかと思っています。

重要なのは、整角四角形問題を解くということと、正多角形の対角線の共点条件が関係しているということだと思われます。今ごろそんなことに気付くとは、と笑止の向きもあるでしょうが自らの思考の成果と思っています。



「整角四角形問題 1」の公式との同値性

整角四角形問題 1 の公式は

$$\frac{1}{\tan x} = -\frac{\cos a}{\sin a} + \frac{\sin(a+b+c)\sin(c+d)}{\sin a \sin c \sin(b+c+d)} \quad \dots\dots ①$$

今回の公式は

$$\frac{\sin(c-x)}{\sin x} = \frac{\sin b \sin(d-a)}{\sin a \sin(b+c+d)} \quad \text{から}$$

$$\frac{1}{\tan x} = \frac{\cos c}{\sin c} + \frac{\sin b \sin(d-a)}{\sin a \sin c \sin(b+c+d)} \quad \dots\dots ②$$

② の右辺から ① の右辺を導くことができます。とちゅう適時

$$A = a + b + c, \quad B = b + c + d, \quad d - a = B - A, \quad a + c = A - b$$

のような略記を用います。

$$\frac{\cos c}{\sin c} + \frac{\sin b \sin(d-a)}{\sin a \sin c \sin(b+c+d)} = \frac{\sin a \cos c \sin B + \sin b \sin(B-A)}{\sin a \sin c \sin B}$$

$$\text{分子} = \{\sin(a+c) - \cos a \sin c\} \sin B + \sin b \{\sin B \cos A - \cos B \sin A\}$$

$$= \sin(A-b) \sin B - \cos a \sin c \sin B + \sin b \{\sin B \cos A - \cos B \sin A\}$$

$$= \{\sin A \cos b - \cos A \sin b\} \sin B - \cos a \sin c \sin B + \sin b \{\sin B \cos A - \cos B \sin A\}$$

$$= -\cos a \sin c \sin B + \{\sin B \cos b - \cos B \sin b\} \sin A$$

$$= -\cos a \sin c \sin B + \sin A \sin(B-b)$$

$$\text{② の右辺} = \frac{-\cos a \sin c \sin B + \sin A \sin(B-b)}{\sin a \sin c \sin B}$$

$$= -\frac{\cos a}{\sin a} + \frac{\sin(a+b+c)\sin(c+d)}{\sin a \sin c \sin(b+c+d)} = \text{① の右辺}$$