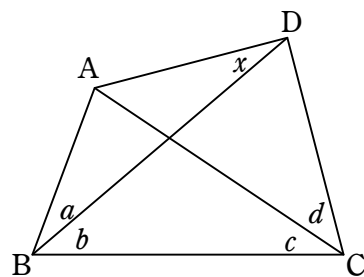


$$x = \theta \Leftrightarrow \frac{\sin b \sin(d-a)}{\sin a \sin(b+c+d)} = \frac{\sin(c-\theta)}{\sin \theta}$$

$$\Leftrightarrow \sin \theta \sin b \sin(d-a) = \sin(c-\theta) \sin a \sin(b+c+d)$$



例題 4 （単位°は省略）

$x=18$ となることを示したい。そのためには等式

$$\sin 18 \sin 46 \sin 10 = \sin 4 \sin 38 \sin 64$$

を証明すればよい。ただし $\sin 116 = \sin 64$ を用いた。

証明には三角関数の倍角公式の積表示を利用する。そのため
以下では $\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = [\alpha, \beta, \gamma]$ などと略記する。

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \sin \alpha \sin(90 - \alpha) \quad \text{すなわち} \quad [2\alpha] = 2[\alpha, 90 - \alpha]$$

$$\sin 3\alpha = 4 \sin \alpha \sin(60 - \alpha) \sin(60 + \alpha), \quad [3\alpha] = 4[\alpha, 60 - \alpha, 60 + \alpha]$$

この問題では、2 倍角、3 倍角の公式では不十分で、さらに 5 倍角の公式が必要だと思われる。

（5 倍角公式の積表示については PRINT 教材「n 倍角公式」を参照のこと）

$$\sin 5\alpha = 16 \sin \alpha \sin(36 - \alpha) \sin(36 + \alpha) \sin(72 - \alpha) \sin(72 + \alpha),$$

$$[5\alpha] = 16[\alpha, 36 - \alpha, 36 + \alpha, 72 - \alpha, 72 + \alpha]$$

これら公式群から適当な式を選んで並べる。ここで $\ll 3, 6 \gg$ は 3 倍角の公式で $\alpha=6$ を表す。

$$[18] = 4[6, 54, 66] \quad \ll 3, 6 \gg$$

$$16[10, 26, 46, 62, 82] = [50] \quad \ll 5, 10 \gg$$

$$[12] = 4[4, 56, 64] \quad \ll 3, 4 \gg$$

$$[76] = 2[38, 52] \quad \ll 2, 38 \gg$$

$$[52] = 2[26, 64] \quad \ll 2, 26 \gg$$

$$[56] = 2[28, 62] \quad \ll 2, 28 \gg$$

$$[16] = 2[8, 82] \quad \ll 2, 8 \gg$$

$$16[8, 28, 44, 64, 80] = [40] \quad \ll 5, 8 \gg$$

$$16[6, 42, 66, 78] = 1 \quad \ll 5, 6 \gg$$

$$[84] = 2[42, 48] \quad \ll 2, 42 \gg$$

$$[24] = 2[78, 12] \quad \ll 2, 12 \gg$$

$$2[36, 54] = [72] \quad \ll 2, 36 \gg$$

$$[48] = 4[16, 44, 76] \quad \ll 3, 16 \gg$$

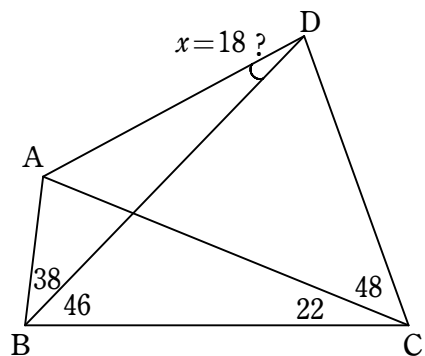
$$2[50, 40] = [80] \quad \ll 2, 40 \gg$$

$$4[12, 48, 72] = [36] \quad \ll 3, 12 \gg$$

$$1 = 16[12, 24, 48, 84] \quad \ll 5, 12 \gg$$

左辺、右辺どうしを掛けあわせ両辺に共通する因数を約分すれば等式

$$[18, 46, 10] = [4, 38, 64] \text{ が得られる。}$$



例題 5 $\left(18, \frac{144}{7}, 24, \frac{450}{7}; \frac{90}{7}\right)$

角度の単位を $\tau = \frac{6^\circ}{7}$ とすると, $6^\circ = 7\tau$, $90^\circ = 105\tau$ などと表される。

問題は右図のようになり, $x = 15\tau$ となることを示すには等式

$$\sin 15\tau \sin 24\tau \sin 54\tau = \sin 13\tau \sin 21\tau \sin 83\tau$$

を証明すればよい。ただし $\sin 127\tau = \sin 83\tau$ を用いた。

以下ではこれを

$$[15, 24, 54] = [13, 21, 83]$$

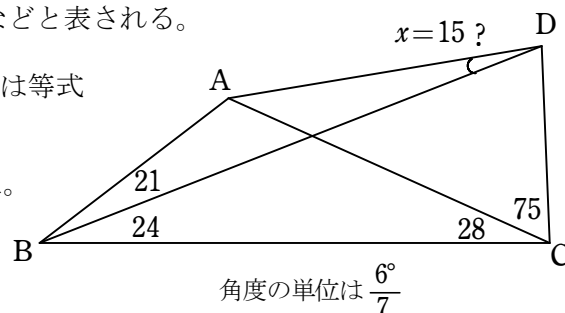
のように略記する。証明に用いる三角関数の倍角公式は

$$[2\alpha] = 2[\alpha, 105 - \alpha], \quad [3\alpha] = 4[\alpha, 70 - \alpha, 70 + \alpha]$$

$$[5\alpha] = 16[\alpha, 42 - \alpha, 42 + \alpha, 84 - \alpha, 84 + \alpha]$$

$$[7\alpha] = 64[\alpha, 30 - \alpha, 30 + \alpha, 60 - \alpha, 60 + \alpha, 90 - \alpha, 90 + \alpha]$$

となる。この問題では 7 倍角の公式も必要とした。これら公式群から適当な式を選んで並べる。



角度の単位は $\frac{6^\circ}{7}$

$$\begin{aligned} 2[15, 90] &= [30] &< 2, 15 > \\ 64[6, 24, 36, 54, 66, 84, 96] &= [42] &< 7, 6 > \\ [26] &= 2[13, 92] &< 2, 13 > \\ [42] &= 2[21, 84] &< 2, 21 > \\ [44] &= 2[22, 83] &< 2, 22 > \\ [30] &= 16[6, 36, 48, 78, 90] &< 5, 6 > \\ [78] &= 4[26, 44, 96] &< 3, 26 > \\ 4[22, 48, 92] &= [66] &< 3, 22 > \end{aligned}$$

左辺, 右辺どうしを掛けあわせ両辺に共通する因数を約分すれば等式

$$[15, 24, 54] = [13, 21, 83]$$

が得られる。

感想

例題 4 と 5 については, 難問であったが初等幾何学的解決が見事達成された問題として, ネットで紹介されていた問題です。これに三角関数による解法が通用するか挑戦したのが上記です。公式群の数字を眺めながら目的の等式に近づくのは, 数学の問題というよりはパズルを解いている気分でした。とちゅう 5 倍角や 7 倍角公式の必要性に気付かなかったこともあり, 少々時間がかかりましたがそれなりの達成感が味わえました。