

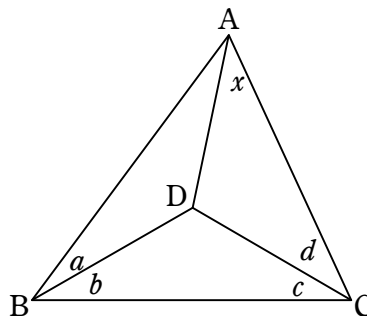
整角三角形問題（三角関数による解法）

—— 整角三角形問題（三角関数による解法） ——

$$x = \theta \iff \frac{\sin a \sin c}{\sin b \sin d} = \frac{\sin(A - \theta)}{\sin \theta}$$

$$\iff \sin \theta \sin a \sin c = \sin(A - \theta) \sin b \sin d$$

ただし $A = 180^\circ - a - b - c - d$



解説

$$\triangle DAC = \frac{1}{2} DA \cdot AC \sin \angle DAC, \quad \triangle DAB = \frac{1}{2} DA \cdot AB \sin \angle DAB$$

これから

$$\frac{\sin \angle DAC}{\sin \angle DAB} = \frac{AB \cdot \triangle DAC}{AC \cdot \triangle DAB}$$

同様にして $\frac{\sin \angle DAC}{\sin \angle DAB} = \frac{BC \cdot \triangle DBA}{BA \cdot \triangle DBC}, \quad \frac{\sin \angle DCB}{\sin \angle DCA} = \frac{CA \cdot \triangle DCB}{CB \cdot \triangle DCA}$

これら 3 式の左辺どうし、右辺どうしを掛けあわせると

$$\frac{\sin \angle DAC}{\sin \angle DAB} \cdot \frac{\sin \angle DAC}{\sin \angle DAB} \cdot \frac{\sin \angle DCB}{\sin \angle DCA} = 1$$

すなわち $\frac{\sin x \sin a \sin c}{\sin(A - x) \sin b \sin d} = 1$ よって $\frac{\sin(A - x)}{\sin x} = \frac{\sin a \sin c}{\sin b \sin d}$

したがって $\frac{\sin a \sin c}{\sin b \sin d} = \frac{\sin(A - \theta)}{\sin \theta}$ であれば $x = \theta$, 逆もいえる。

上の解法は a, b, c, d から x を求めるというより, x を知った上で $x = \theta$ を示すためには等式

$$\sin \theta \sin a \sin c = \sin(A - \theta) \sin b \sin d$$

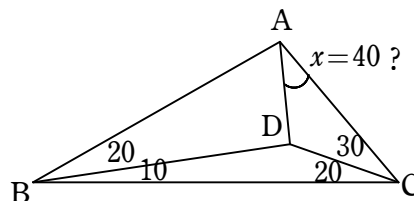
を証明すればよいということを主張しています。

例題 1 （単位°は省略）

$x = 40$ となることを示したい。そのためには等式

$$\sin 40 \sin 20 \sin 20 = \sin 60 \sin 10 \sin 30$$

を証明すればよい。



証明には三角関数の倍角公式の積表示を利用する。そのため以下では $\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = [\alpha, \beta, \gamma]$ などと略記する。

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \sin \alpha \sin(90 - \alpha) \quad \text{すなわち} \quad [2\alpha] = 2[\alpha, 90 - \alpha]$$

$$\sin 3\alpha = 4 \sin \alpha \sin(60 - \alpha) \sin(60 + \alpha), \quad [3\alpha] = 4[\alpha, 60 - \alpha, 60 + \alpha]$$

これら公式群から適当な式を選んで並べる。ここで $\ll 3, 20 \gg$ は 3 倍角の公式で $\alpha = 20$ を表す。

$$4[20, 40, 80] = [60] \quad \ll 3, 20 \gg$$

$$[20] = 2[10, 80] \quad \ll 2, 10 \gg$$

$$1 = 2[30]$$

左辺，右辺どうしを掛けあわせ両辺に共通する因数を約分すれば等式

$$[40, 20, 20] = [60, 10, 30]$$

が得られる。

例題 2

$x=48$ となることを示すために等式

$$\sin 48 \sin 6 \sin 42 = \sin 12 \sin 54 \sin 18$$

を証明する。

$$2[42, 48] = [84] \quad \ll 2, 42 \gg$$

$$2[6, 84] = [12] \quad \ll 2, 6 \gg$$

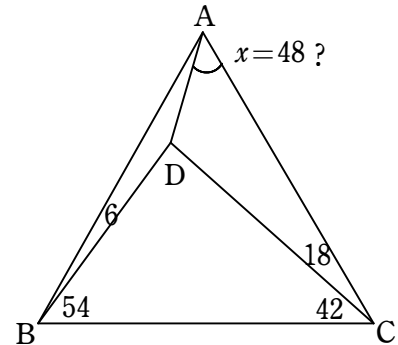
$$[36] = 2[18, 72] \quad \ll 2, 18 \gg$$

$$[72] = 2[36, 54] \quad \ll 2, 36 \gg$$

左辺，右辺どうしを掛けあわせ両辺に共通する因数を約分すれば等式

$$[48, 6, 42] = [12, 54, 18]$$

が得られる。



例題 3

$x=42$ となることを示すために等式

$$\sin 42 \sin 6 \sin 54 = \sin 24 \sin 42 \sin 12 \quad \text{すなわち}$$

$$\sin 6 \sin 54 = \sin 24 \sin 12$$

を証明する。

この問題では 5 倍角の公式も必要となる。

$$\sin 5\alpha = 16 \sin \alpha \sin(36 - \alpha) \sin(36 + \alpha) \sin(72 - \alpha) \sin(72 + \alpha),$$

$$[5\alpha] = 16[\alpha, 36 - \alpha, 36 + \alpha, 72 - \alpha, 72 + \alpha]$$

$$4[6, 54, 66] = [18] \quad \ll 3, 6 \gg$$

$$1 = 16[12, 24, 48, 84] \quad \ll 5, 12 \gg$$

$$[48] = 2[24, 66] \quad \ll 2, 24 \gg$$

$$2[18, 72] = [36] \quad \ll 2, 18 \gg$$

$$4[24, 36, 84] = [72] \quad \ll 3, 24 \gg$$

これらから等式 $[6, 54] = [24, 12]$ が得られる。

