

第2問

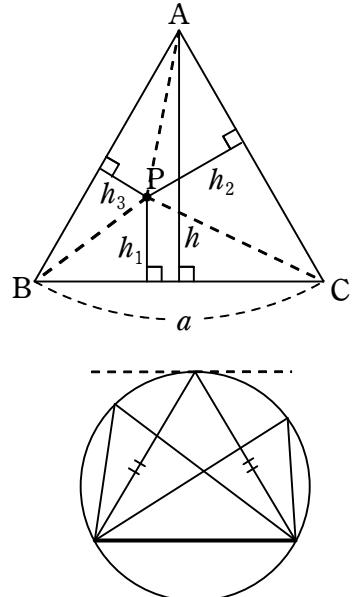
関連事項

一边の長さが a の正三角形の高さは $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, 面積は $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$,

右図のように、内部の任意の点 P から各辺に引いた垂線の長さを h_1, h_2, h_3 とすると $\triangle PBC + \triangle PCA + \triangle PAB = \triangle ABC$ から

$$\frac{1}{2}a(h_1 + h_2 + h_3) = \frac{1}{2}ah \quad \text{よって} \quad h_1 + h_2 + h_3 = h$$

円に内接する三角形のうち、面積が最大となるのは正三角形のときである。1つの辺を固定して考えると、高さが最大のとき面積最大となるが、それは二等辺三角形のときである。これを3辺について考えると、面積最大は正三角形のときだと推測できる。



解答例

(1) $\triangle ABP$ は一边の長さが $2\sqrt{6}$ の正三角形だからその面積は

図の $\triangle OAB$ の面積に等しく

$$\frac{\sqrt{3}}{4}(2\sqrt{6})^2 = \boxed{6\sqrt{3}}$$

(2) 正三角形 OAB の高さの2倍だから

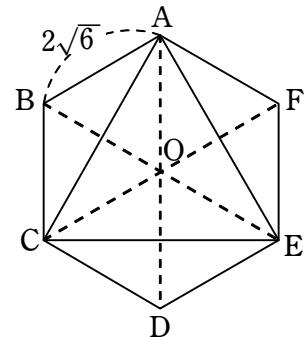
$$AC = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2\sqrt{6} \times 2 = \boxed{6\sqrt{2}}$$

(3) 三角形の総数は、6個の頂点から異なる3個を選ぶ組合せの

総数に等しいから ${}_6C_3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \boxed{20}$ 個、これらの三角形は

すべて正六角形 $ABCDEF$ の外接円に内接するが、面積が最大となるのは

正三角形のときだから、その面積は $\triangle OAB$ の面積の3倍で $\boxed{18\sqrt{3}}$



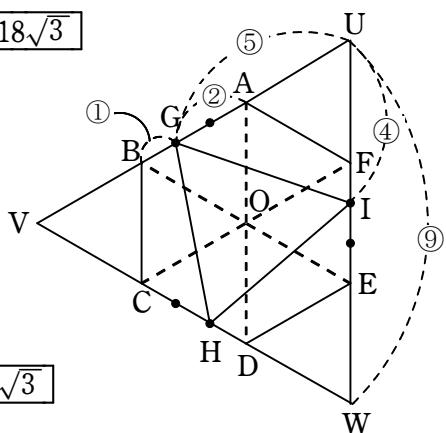
(4) 右図で $\triangle UVW$ は正三角形で、その面積は

$$\triangle UVW = \triangle OAB \times 9 = 54\sqrt{3}$$

$$\triangle UGI = \triangle UVW \times \frac{5}{9} \times \frac{4}{9} = \triangle UVW \times \frac{20}{81}$$

よって

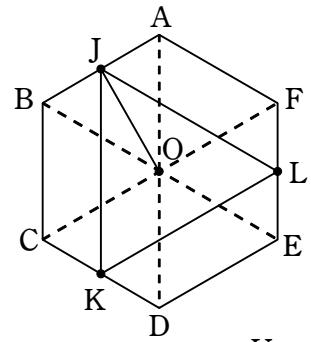
$$\triangle GHI = \triangle UVW \times \left(1 - \frac{20}{81} \times 3\right) = \triangle UVW \times \frac{7}{27} = \boxed{14\sqrt{3}}$$



(5) $\triangle JKL$ は正三角形で、その重心は O に一致し、 $\triangle JKL$ の面積は OJ の長さの 2 乗に比例する。面積が最小になるのは、 OJ の長さが最小になるとき、すなわち J, K, L が辺の中点にあるときである。

このとき、一辺の長さは $AB \times \frac{3}{2} = 3\sqrt{6}$ だから、面積の最小値は

$$\frac{\sqrt{3}}{4} (3\sqrt{6})^2 = \boxed{\frac{27\sqrt{3}}{2}}$$



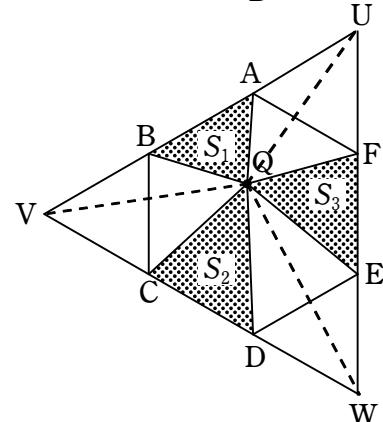
(6) 右図で $\triangle UVW = 54\sqrt{3}$ であり

$$\triangle QUV + \triangle QVW + \triangle QWU = \triangle UVW$$

$\triangle QUV = \triangle QAB \times 3 = 3S_1$, $\triangle QVW$, $\triangle QWU$ も同様で

$$3S_1 + 3S_2 + 3S_3 = 54\sqrt{3} \text{ から } S_1 + S_2 + S_3 = 18\sqrt{3}$$

$$S_1 : S_2 : S_3 = 1 : 3 : 4 \text{ から } S_1 = 18\sqrt{3} \times \frac{1}{8} = \boxed{\frac{9\sqrt{3}}{4}}$$



感想

(3) と (5) では次の性質を使いました。

円に内接する三角形のうち、面積が最大となるのは正三角形のときである。

正三角形が正六角形に内接するとき、各頂点は隣り合う辺上ではなく、重心は正六角形の中心に一致する。

これらはそれぞれ独自でテーマとなる問題だと思われます。実際、前者は大昔に東大で出題されたとの記憶があります。上の問題を解くうえでは、これらの証明への拘りはむしろ邪魔で、そうなるだろうとの推測のもとに解き進めるのが普通でしょう。ただ、これをストレスに感じる受験生もいることを考慮して、何か別の条件の与え方を考えてもらいたかったようにも思います。