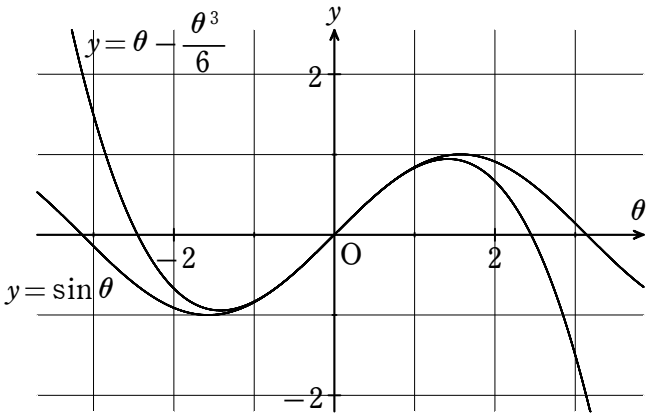
2026年度　東京大学理科 (前期)　　第１問

(1)　関数 $f(\theta)=\sin\theta-\theta+\dfrac{\theta^3}{6}$ の区間 $-1\leqq\theta\leqq1$ における最大値 M および最小値 m を求めよ。

(2)　(1) で定めた M に対し，次の不等式を示せ。

$$\frac{7}{8}\pi\leqq\int_0^{2\pi}\sin(\cos x-x)dx\leqq\frac{7}{8}\pi+4M$$

略解



(1)　$y=\theta-\dfrac{\theta^3}{6}$ は $y=\sin\theta$ の近似式で $f(\theta)$ はそれらの差の関数，グラフを知っていれば $f(\theta)$ が増加関数であることが分かり

$$M=f(1)=\sin1-\frac{5}{6}$$

$$m=f(-1)=-\sin1+\frac{5}{6}$$

である。解答は $f(\theta)$ が増加関数であることを示すことになる。

$$f'(\theta)=\cos\theta-1+\frac{\theta^2}{2},\qquad f''(\theta)=-\sin\theta+\theta,$$

$$f'''(\theta)=-\cos\theta+1$$

θ	$\cdots$	0	$\cdots$
$f''(\theta)$	$-$	0	$+$
$f'(\theta)$	↘	0	↗

$f'''(\theta)\geqq0$ だから $f''(\theta)$ は増加関数で増減表は右，よって $f'(\theta)$ は最小値が 0，すなわち $f'(\theta)\geqq0$ だから $f(\theta)$ は増加関数である。よって $x=-1$ で最小，$x=1$ で最大となる。

(2)　$I=\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin(\cos x-x)dx$ とおく。

積分範囲 $\pi\leqq x\leqq2\pi$ で $2\pi-x=t$ とおくと $\dfrac{dx}{dt}=-1$，

x	π	$\to$	2π
t	π	$\to$	0

であるから

$$\int_\pi^{2\pi}\sin(\cos x-x)dx=\int_\pi^0\sin(\cos(2\pi-t)-2\pi+t)(-1)dt$$

$$=\int_0^\pi\sin(\cos t+t)dt=\int_0^\pi\sin(\cos x+x)dx$$

$$I=\int_0^\pi\sin(\cos x-x)dx+\int_\pi^{2\pi}\sin(\cos x-x)dx=\int_0^\pi\{\sin(\cos x-x)+\sin(\cos x+x)\}dx$$

$$=2\int_0^\pi\sin(\cos x)\cos x\,dx$$

さらに積分範囲 $\dfrac{\pi}{2}\leqq x\leqq\pi$ で $\pi-x=t$ とおくと $\dfrac{dx}{dt}=-1$，

x	$\dfrac{\pi}{2}$	$\to$	π
t	$\dfrac{\pi}{2}$	$\to$	0

であるから

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin(\cos x)\cos x\,dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin(\cos(\pi-t))\cos(\pi-t)(-1)dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(\cos t)\cos t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(\cos x)\cos x\,dx$$

$$I=2\int_0^{\pi}\sin(\cos x)\cos x\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(\cos x)\cos x\,dx+2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin(\cos x)\cos x\,dx$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(\cos x)\cos x\,dx$$

$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき $0\leqq\cos x\leqq 1$ であり，(1) より 関数 $f(\theta)=\sin\theta-\theta+\dfrac{\theta^3}{6}$ の区間 $0\leqq\theta\leqq 1$ における最大値は M，最小値は 0 であるから，$\theta=\cos x$ として

$$0\leqq\sin(\cos x)-\cos x+\frac{\cos^3 x}{6}\leqq M \quad から \quad \cos x-\frac{\cos^3 x}{6}\leqq\sin(\cos x)\leqq\cos x-\frac{\cos^3 x}{6}+M$$

$$\cos^2 x-\frac{\cos^4 x}{6}\leqq\sin(\cos x)\cos x\leqq\cos^2 x-\frac{\cos^4 x}{6}+M\cos x$$

これから

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^2 x-\frac{\cos^4 x}{6}\right)dx\leqq\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(\cos x)\cos x\,dx\leqq\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^2 x-\frac{\cos^4 x}{6}\right)dx+M\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx$$

$J=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^2 x-\frac{\cos^4 x}{6}\right)dx$ とおき $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=1$ も用いると

$$4J\leqq I\leqq 4J+4M \quad \cdots\cdots(*)$$

ここで

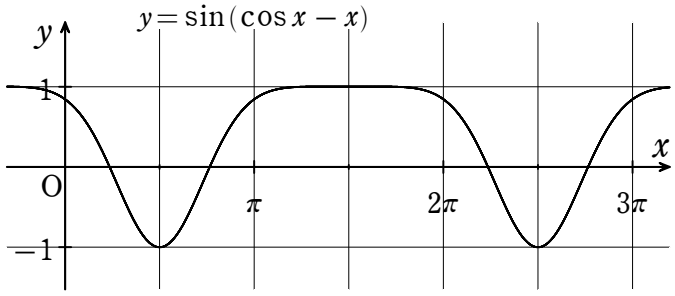
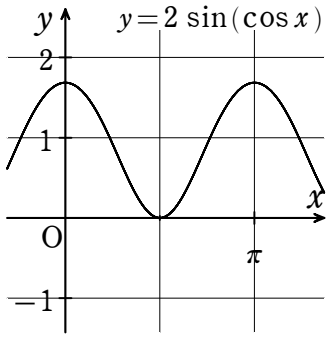
$$\cos^2 x-\frac{\cos^4 x}{6}=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}(1+\cos 2x)^2$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{1}{24}-\frac{1}{12}\cos 2x-\frac{1}{24}\cdot\frac{1}{2}(1+\cos 4x)$$

$$=\frac{7}{16}+\frac{5}{12}\cos 2x-\frac{1}{48}\cos 4x$$

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{7}{16}+\frac{5}{12}\cos 2x-\frac{1}{48}\cos 4x\right)dx$$

であり $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}1\,dx=\frac{\pi}{2}$，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x\,dx=0$，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 4x\,dx=0$ を用いると

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{7}{16}\,dx=\frac{7}{32}\pi \quad よって\ (*)\ は \quad \frac{7}{8}\pi\leqq I\leqq\frac{7}{8}\pi+4M$$

参考