2026年度　東京大学文科 (前期)

第１問

正の実数 k および $\alpha<\beta$ となる実数 α，β が次の条件を満たすように動く。

条件：座標平面上の放物線 C：$y=k(x-\alpha)(\beta-x)$ の頂点は $(-3,\ 1)$ であり，C は y 軸と $-2\leqq y\leqq 0$ の範囲で交わる。

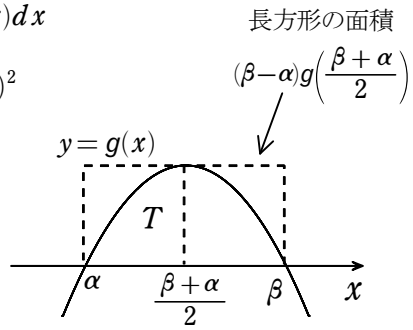
このとき，C と x 軸で囲まれる図形の面積 S のとりうる値の範囲を求めよ。

略解

$g(x)=k(x-\alpha)(\beta-x)$ とすると $k>0$ のとき $y=g(x)$ のグラフは上に凸の放物線で，$y=f(x)$ と x 軸で囲まれる図形の面積を T とすると $T=\int_\alpha^\beta g(x)dx$

$$(x-\alpha)(\beta-x)=(x-\alpha)\{(\beta-\alpha)-(x-\alpha)\}=(\beta-\alpha)(x-\alpha)-(x-\alpha)^2$$

を用いると



$$T=k\int_\alpha^\beta\{(\beta-\alpha)(x-\alpha)-(x-\alpha)^2\}dx$$

$$=k\left[(\beta-\alpha)\cdot\frac{1}{2}(x-\alpha)^2-\frac{1}{3}(x-\alpha)^3\right]_\alpha^\beta=k\cdot\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

$\frac{1}{6}$ 公式

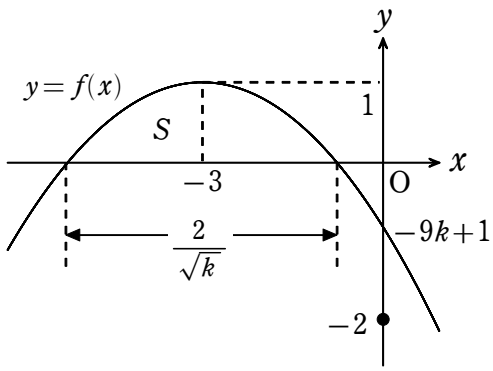
ここで $g\left(\frac{\beta+\alpha}{2}\right)=k\left(\frac{\beta+\alpha}{2}-\alpha\right)\left(\beta-\frac{\beta+\alpha}{2}\right)=k\cdot\frac{1}{4}(\beta-\alpha)^2$ から

$$T=\frac{2}{3}\times(\beta-\alpha)g\left(\frac{\beta+\alpha}{2}\right)\quad\cdots\cdots①$$

$\frac{2}{3}$ 公式

C の方程式を $y=f(x)$ とすると，$f(x)$ の x^2 の係数が $-k$ であり C の 頂点が $(-3,\ 1)$ であることから

$$f(x)=-k(x+3)^2+1$$



C と x 軸との交点の x 座標は

$$-k(x+3)^2+1=0 \text{ から } x=-3\pm\frac{1}{\sqrt{k}}$$

よって ① から　$S=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{\sqrt{k}}=\frac{4}{3\sqrt{k}}$　……②

C と y 軸との交点の y 座標は $g(0)=-9k+1$ であり，与えられた条件から

$$-2\leqq-9k+1\leqq 0 \quad\text{これから}\quad \frac{1}{3}\geqq k\geqq\frac{1}{9} \quad\text{よって}\quad \sqrt{3}\leqq\frac{1}{\sqrt{k}}\leqq 3$$

② から　$\frac{4\sqrt{3}}{3}\leqq S\leqq 4$　……(答)

感想　$\frac{1}{6}$ 公式はよく知られていますが，$\frac{2}{3}$ 公式 (自分で勝手にそう呼んでいる) の形 ① に容易に変形でき，長方形の面積の $\frac{2}{3}$ だという図形的な意味はシンプルです。この問題のように頂点が固定された場合にはとくに有効だと思います。3 次関数でも同様な公式があります。