略解

(1)　R の座標を $(s,\ t,\ u)$ とすると，R が S 上にあることから

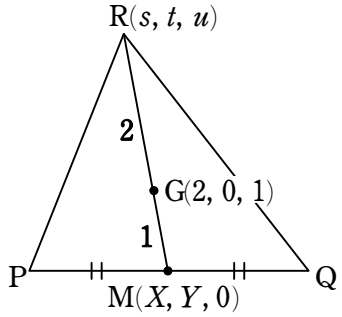
$$s^2+t^2+u^2=25 \quad \cdots\cdots①$$

M は xy 平面上にあるから，その座標を $(X,\ Y,\ 0)$ とする。

G は線分 RM を 2 : 1 に内分するから

$$\frac{s+2X}{3}=2,\ \frac{t+2Y}{3}=0,\ \frac{u}{3}=1 \quad \text{これから}$$

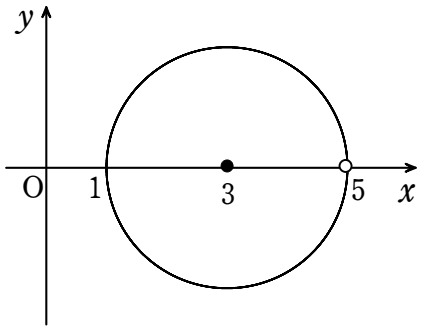
$$s=-2X+6,\ t=-2Y,\ u=3 \quad \cdots\cdots②$$



①，② から

$$4(X-3)^2+4Y^2+9=25 \quad \text{よって} \quad (X-3)^2+Y^2=4$$

S と xy 平面の共有点は原点 O を中心とした半径 5 の円 C であり，M は C の内部にあるから，M の軌跡は中心 $(3,\ 0)$，半径 2 の円となる，ただし点 $(5,\ 0)$ を除く。(右図)



(2)　xy 平面上で M $(X,\ Y)$ とすると

$$(X-3)^2+Y^2=4 \quad \cdots\cdots③$$

直線 PQ 上の点を T $(x,\ y)$ とすると，線分 PQ は円 C の弦で M は PQ の中点だから $\overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{OM}$

$$\overrightarrow{MT}\cdot\overrightarrow{OM}=(x-X)X+(y-Y)Y=0,$$

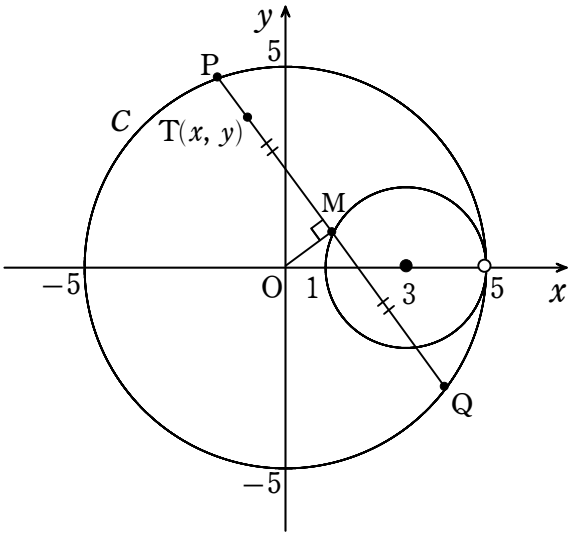
$$xX+yY-X^2-Y^2=0 \quad \cdots\cdots④$$

③ を用いて ④ の X^2+Y^2 を消去すると

$$(x-6)X+yY+5=0 \quad \cdots\cdots④'$$

XY 座標平面上で ③ は円，④′ は直線を表す。

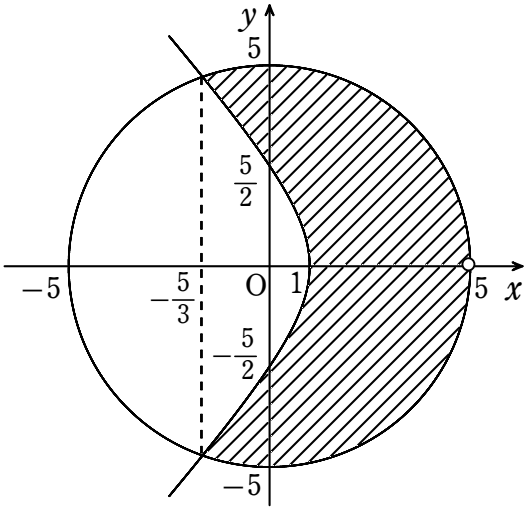
③，④′ を満たす実数 X，Y が存在するための実数 x，y の条件は，③，④′ が共有点をもつための条件と同値である。それは，円 ③ の中心 $(3,\ 0)$ と直線 ④′ の距離が円の半径 2 以下であることだから



$$\frac{|(x-6)\cdot 3+y\cdot 0+5|}{\sqrt{(x-6)^2+y^2}}\leqq 2$$

$$|3x-13|^2\leqq 4(x-6)^2+4y^2$$

$$5x^2-30x-4y^2+25\leqq 0$$

よって　$\dfrac{(x-3)^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}\leqq 1$　……⑤

求める範囲は ⑤ を満たし円 C の周および内部で右図の斜線部分ただし点 $(5,\ 0)$ を除く。