2026年度　東京大学理科 (前期)

第４問

k を実数とし，座標平面上の曲線 C を $y = x^3 - kx$ で定める。C 上の 2 点 P，Q に対する以下の条件 (*) を考える。

条件 (*)　原点 O，点 P，点 Q は相異なり，C の O，P，Q における接線のうち，どの 2 本も交わり，そのなす角はすべて $\dfrac{\pi}{3}$ となる。

ただし，2 直線のなす角は 0 以上 $\dfrac{\pi}{2}$ 以下の範囲で考えるものとする。

(1)　条件 (*) を満たす P，Q が存在するような k の範囲を求めよ。

(2)　k が (1) で定まる範囲にあるとする。P，Q が条件 (*) を満たすように動くとき，C の O，P，Q における接線によって囲まれる三角形の面積 S の最大値を M，最小値を m とおく。ただし，3 本の接線が 1 点で交わるときは $S=0$ とする。$M = 4m$ となる k の値を求めよ。

略解

(1)　$f(x)=x^3-kx$ とおくと $f'(x)=3x^2-k$ これから $f'(x)$ の最小値は $f'(0)=-k$

すなわち C の接線については O における接線 ℓ_{O} の傾きが最小となる。

接線と x 軸の正の向きのなす角 (偏角) を $-\dfrac{\pi}{2}$ から $\dfrac{\pi}{2}$ までの間で考え，

ℓ_{O} の偏角を θ とすると $\tan\theta=-k$

条件 (*) を満たす ℓ_{O} 以外の 2 つの接線の偏角は $\theta+\dfrac{\pi}{3}$，$\theta+\dfrac{2\pi}{3}$ だから，

この 2 接線が存在するためには　$\theta+\dfrac{2\pi}{3}<\dfrac{\pi}{2}$　よって　$\theta<-\dfrac{\pi}{6}$

$$\tan\theta<\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)\ \text{から}\ -k<-\frac{1}{\sqrt{3}}\ \text{したがって}\ k>\frac{1}{\sqrt{3}}\quad\cdots\cdots(\text{答})$$

(2)　$y=f(x)$ のグラフ C は原点に関して対称だから，偏角が $\theta+\dfrac{\pi}{3}$ の接線は 2 つ存在し，その接点を $\mathrm{A}\,(a,\,f(a))$，$\mathrm{A}'\,(-a,\,f(-a))$ $(a>0)$ とし，接線を ℓ_{A}，$\ell_{\mathrm{A}'}$ とする。同様に，偏角が $\theta+\dfrac{2\pi}{3}$ の接点を $\mathrm{B}\,(b,\,f(b))$，$\mathrm{B}'\,(-b,\,f(-b))$ $(b>0)$ とし，接線を ℓ_{B}，$\ell_{\mathrm{B}'}$ とする。

$\tan\theta=-k$ のとき，ℓ_{A}，$\ell_{\mathrm{A}'}$ の傾きは

$$\tan\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\tan\theta+\tan\dfrac{\pi}{3}}{1-\tan\theta\tan\dfrac{\pi}{3}}=\frac{-k+\sqrt{3}}{\sqrt{3}\,k+1}$$

$f'(a)=3a^2-k=\dfrac{-k+\sqrt{3}}{\sqrt{3}k+1}$ から

$a^2=\dfrac{k^2+1}{3k+\sqrt{3}}$ ……①

ℓ_{B}，$\ell_{\mathrm{B'}}$ の傾きは

$\tan\left(\theta+\dfrac{2\pi}{3}\right)=\dfrac{k+\sqrt{3}}{\sqrt{3}k-1}$

$f'(b)=3b^2-k=\dfrac{k+\sqrt{3}}{\sqrt{3}k-1}$ から

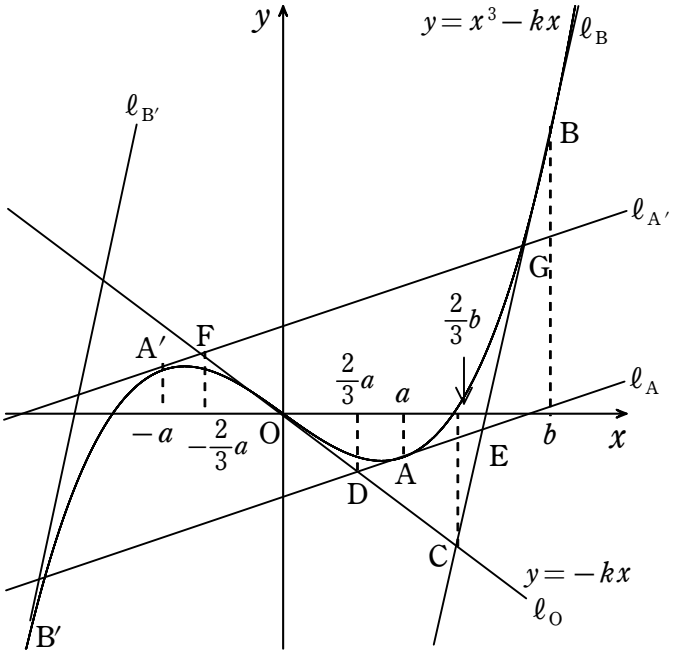
$b^2=\dfrac{k^2+1}{3k-\sqrt{3}}$ ……②

C 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は

$y-(t^3-kx)=(3t^2-k)(x-t)$ から

$y=(3t^2-k)x-2t^3$

これと ℓ_{O} の交点の x 座標は



$(3t^2-k)x-2t^3=-kx$ から $x=\dfrac{2}{3}t$ $(t\neq 0)$

ℓ_{O} と ℓ_{B} の交点 C の x 座標は $\dfrac{2}{3}b$，ℓ_{O} と ℓ_{A} の交点 D の x 座標は $\dfrac{2}{3}a$，ℓ_{O} と $\ell_{\mathrm{A'}}$ の交点 F の x 座標は $-\dfrac{2}{3}a$ また ℓ_{B} と ℓ_{A}，$\ell_{\mathrm{A'}}$ の交点を E，G とする。

$y=f(x)$ のグラフ C は原点に関して対称だから $y\geqq -kx$ の領域の三角形について考える。
P，Q が A′，B と一致するとき 3 接線は正三角形 CFG をつくり S は最大値 M をとり，P，Q がA，B と一致するとき 3 接線は正三角形 CDE をつくり S は最小値 m をとる。
$M=4m$ となるのは CF=2 CD のときであり，辺を x 軸へ正射影すると

$\dfrac{2}{3}\{b-(-a)\}=2\cdot\dfrac{2}{3}(b-a)$ これから $b=3a$ よって $b^2=9a^2$

①，② から $\dfrac{k^2+1}{3k-\sqrt{3}}=9\cdot\dfrac{k^2+1}{3k+\sqrt{3}}$ したがって $k=\dfrac{5\sqrt{3}}{12}$ ……(答)

感想 (2) の「P，Q が条件 (*) を**満たすように動く**とき，… S の最大値を M，最小値を m とおく。… $M=4m$ となる k の値を求めよ。」この問題文の意味がはじめは分かりませんでした。S が k の関数として変化し，ある k の値で最大値や最小値をとる，と考えたところ k の値を求めよ，とあったので呆然としました。「P，Q が条件を**満たしながら** k が変化する」というように思いこんでしまったようです。よくよく考えて，条件を満たす点が C 上にあって，そこに P，Q が移動すると解釈して納得しましたが，それでいいのでしょうか。その解釈で上の略解をつくりました。自分はだいぶ時間がかかってしまいましたが，受験生はどうだったのでしょう。