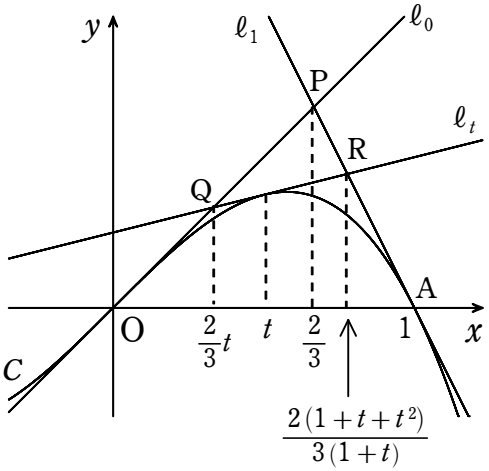
2026年度　大阪大学理系（前期）

1　座標平面において，$y=x-x^3$ で表される曲線を C とする。実数 s に対して，C 上の点 $(s,\ s-s^3)$ における C の接線を ℓ_s で表す。t を $0<t<1$ をみたす実数とするとき，ℓ_0 と ℓ_1 の交点を P，ℓ_0 と ℓ_t の交点を Q，ℓ_1 と ℓ_t の交点を R とし，三角形 PQR の面積を $S(t)$ とする。

(1)　$S(t)$ を t の式で表せ。

(2)　実数 t が $0<t<1$ の範囲を動くとき，$S(t)$ を最大にする t の値と，$S(t)$ の最大値を求めよ。

略解



(1)　$f(x)=x-x^3$ とおくと $f'(x)=1-3x^2$，ℓ_s の方程式は

$$y-(s-s^3)=(1-3s^2)(x-s) \text{ から } y=(1-3s^2)x+2s^3$$

これから

$$\ell_0:\ y=x \qquad \ell_1:\ y=-2x+2$$

$$\ell_t:\ y=(1-3t^2)x+2t^3$$

P，Q，R の x 座標は $\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{2}{3}t$，$\dfrac{2(1+t+t^2)}{3(1+t)}$

A $(1,0)$ とすると，

$$\mathrm{PO}:\mathrm{PQ}=\frac{2}{3}:\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{3}t\right)=1:(1-t)$$

$$\mathrm{PA}:\mathrm{PR}=\left(1-\frac{2}{3}\right):\left(\frac{2(1+t+t^2)}{3(1+t)}-\frac{2}{3}\right)=1:\frac{2t^2}{1+t}$$

ゆえに　$\triangle\mathrm{PQR}=\triangle\mathrm{POE}\times\dfrac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{PO}}\times\dfrac{\mathrm{PR}}{\mathrm{PA}}$ …(*)　すなわち $S(t)=\dfrac{2(1-t)t^2}{3(1+t)}$ ……(答)

(2)　$\dfrac{3}{2}S'(t)=\dfrac{(2t-3t^2)(1+t)-(t^2-t^3)}{(1+t)^2}=\dfrac{2t(1-t-t^2)}{(1+t)^2}$

$1-t-t^2=0$ の 2 解を $\alpha=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$，$\beta=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

とすると $\alpha<0<\beta<1$ であり $\dfrac{3}{2}S'(t)=\dfrac{2t(\beta-t)(t-\alpha)}{(1+t)^2}$

t	0	…	β	…	1
$S'(t)$		+	0	−	
$S(t)$		↗	極大	↘	

右の増減表から $S(t)$ は $t=\beta$ のとき最大値 $S(\beta)=\dfrac{2(1-\beta)\beta^2}{3(1+\beta)}$ をとる。ここで $\beta^2+\beta-1=0$ から

$$1-\beta=\beta^2,\ 1+\beta=\frac{1}{\beta},\ \beta^5=(\beta^2+\beta-1)(\beta^3-\beta^2+2\beta-3)+5\beta-3=\frac{-11+5\sqrt{5}}{2}$$

したがって　$S(\beta)=\dfrac{2\beta^5}{3}=\dfrac{-11+5\sqrt{5}}{3}$ ……(答)

感想　3 次関数と 3 つの接線からできる三角形という題材は，東大理科第 4 問と同じでした。(*) は中学入試でよく用いられる手法です。点 B$(\beta,0)$ とすると B は OA を黄金分割します。すなわち OA : OB = OB : BA，$S(\beta)=\dfrac{2\beta^5}{3}$ となるのも面白いですね。