

- 4 座標空間内に4点 $O(0,0,0)$, $A(6,0,0)$, $B(0,6,0)$, $C(0,0,6)$ をとる。 OA , OB , OC を辺にもつ立方体を K とし, 3点 $D(0,2,6)$, $E(0,6,3)$, $F(3,6,0)$ を通る平面を α とする。 α による K の切り口を底面とし, O を頂点とする錐体の体積を求めよ。

略解

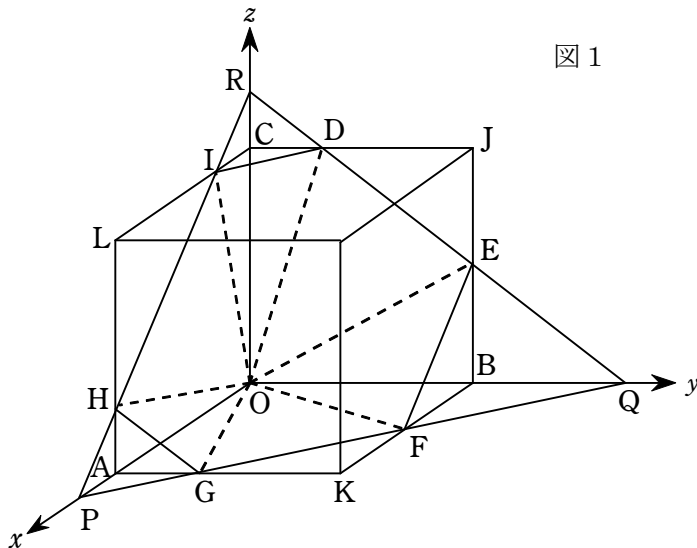


図1

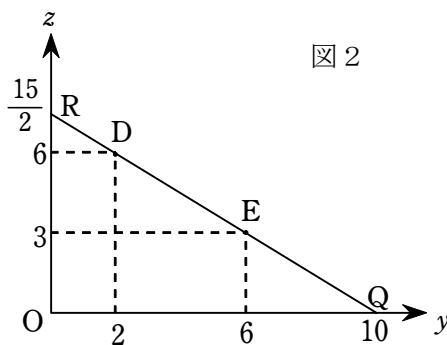


図2

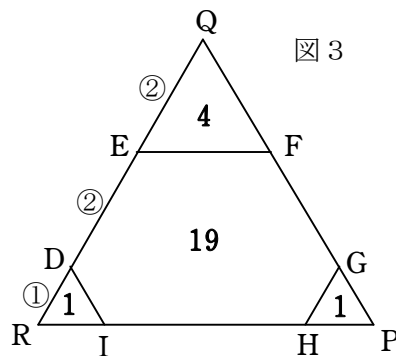


図3

図1のように点をとる。 D , E の座標から $Q(0, 10, 0)$, $R(0, 0, \frac{15}{2})$ となる。対称性から $\triangle OQR \equiv \triangle OQP$ であり

$\triangle QRP$ は $QR=QP$ の二等辺三角形となる。 $EF \parallel RP$, $DI \parallel QP$, $GH \parallel QR$ であるから $\triangle QEF$, $\triangle DRI$, $\triangle GHP$, $\triangle QRP$ は互いに相似で相似比は $2:1:1:5$,

面積比は $4:1:1:25$, 求める錐体の体積を V , 三角錐 $O-PQR$ の体積を V_0 とすると

$$V = V_0 \times \frac{\text{六角形}DEFGHI}{\triangle QRP} = \frac{1}{6} \cdot 10 \cdot \left(\frac{15}{2}\right)^2 \times \frac{19}{25} = \frac{285}{4} \quad \dots\dots(\text{答})$$

感想

図1は河合塾の大学入試問題解答速報を参照しました。 D , E , F を空間座標ではなく, 辺上の位置で与えれば中学受験生でも解けるかもしれません。