

5 r を正の実数とする。複素数 α が

$$(1+r^2)\alpha^2 - 2\alpha + 1 = 0$$

をみたすとする。複素数平面上の3点 $O(0)$, $A(\alpha)$, $B(1)$ について以下の問いに答えよ。

(1) 次の条件をみたす円 C が存在することを証明し、 C の中心を表す複素数と C の半径を求めよ。

条件「すべての正の実数 r に対して、 A は C の上にある。」

(2) $t > 0$ とし、 $r = te^{-t}$ とする。 $t > 0$ における $\triangle OAB$ の面積の最大値とそれを与える t を求めよ。

解答例

(1) $(1+r^2)\alpha^2 - 2\alpha + 1 = 0 \dots \textcircled{1}$ これから $(\alpha-1)^2 = -r^2\alpha^2$

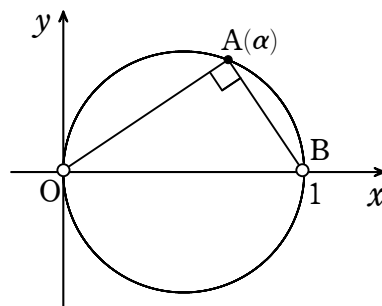
$\alpha=0$ は $\textcircled{1}$ をみたさないから $\alpha \neq 0$, また $r^2 \neq 0$ だから $\alpha \neq 1$

$$\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^2 = -r^2 \text{ から } \frac{\alpha-1}{\alpha} = \pm ir \dots \textcircled{2}$$

A は O, B と異なり、 $\textcircled{2}$ は $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{BA}$ を表す。

OB を直径とする円を C (ただし O, B を除く) とすると α が $\textcircled{1}$ をみたすとき A はこの C 上にある。逆に C 上の

任意の点 α は $\textcircled{1}$ をみたす。 C の中心は $\frac{1}{2}$, 半径は $\frac{1}{2}$ である。



(2) $\textcircled{2}$ から $|\alpha-1| = r|\alpha|$ すなわち $BA = rOA$

$\triangle OAB$ において $OA^2 + BA^2 = OB^2$ であるから $(1+r^2)OA^2 = 1$

$$\triangle OAB = \frac{1}{2}OA \cdot BA = \frac{1}{2}rOA^2 = \frac{r}{2(1+r^2)}$$

$r = te^{-t}$ のとき、 $\triangle OAB$ の面積を $S(t)$ とすると

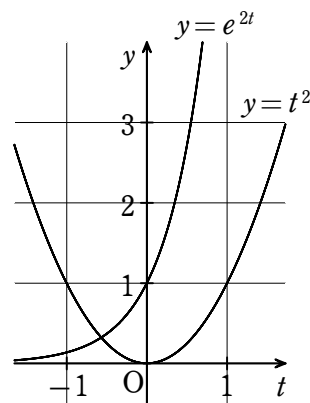
$$S(t) = \frac{te^{-t}}{2(1+t^2e^{-2t})} = \frac{te^t}{2(e^{2t}+t^2)} \quad (t > 0)$$

$$S'(t) = \frac{(1+t)e^t \cdot (e^{2t}+t^2) - te^t(2e^{2t}+2t)}{2(e^{2t}+t^2)^2} = \frac{(1-t)(e^{2t}-t^2)e^t}{2(e^{2t}+t^2)^2}$$

t	0	...	1	...
$S'(t)$		+	0	-
$S(t)$		↗	極大	↘

増減表は右のようになる。ゆえに

$\triangle OAB$ の面積は $t=1$ のとき最大値 $\frac{e}{2(e^2+1)}$ をとる。



感想

$\textcircled{1}$ の意味に気付いたことがポイントでした。

$t > 0$ のとき、関数の増加の仕方から $e^{2t} - t^2 > 0$

であることは自明と考えました。(右図)