

略解

(1) 複素数 $e(\theta)$ が表す点は、複素数平面上で原点 O 中心、半径 1 の円周上にある。

$$e(\theta_1)e(\theta_2)=e(\theta_1+\theta_2), \quad \frac{e(\theta_1)}{e(\theta_2)}=e(\theta_1-\theta_2), \quad \overline{e(\theta)}=e(-\theta)=\frac{1}{e(\theta)},$$

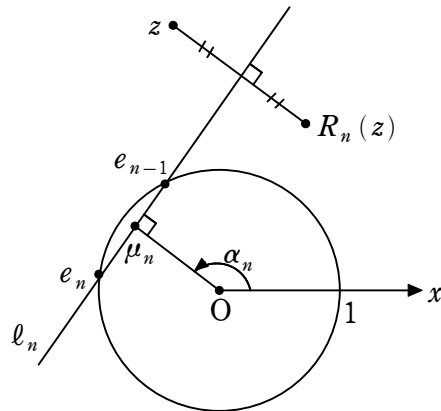
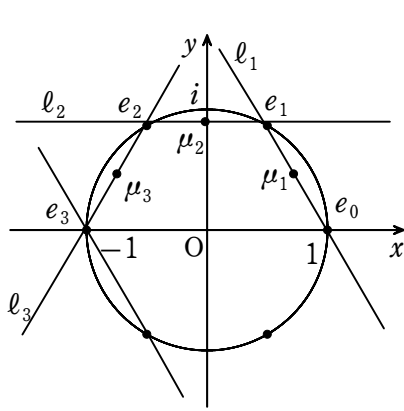
$e(0)=1, e(\pi)=-1$, 負でない整数 n に対し $\{e(\theta)\}^n=e(n\theta)$ が成り立つ。また

$$\cos\theta_1+\cos\theta_2=2\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2}, \quad \sin\theta_1+\sin\theta_2=2\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2} \quad \text{から}$$

$$e(\theta_1)+e(\theta_2)=2\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2}e\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)$$

$e\left(\frac{n}{3}\pi\right)$ を e_n で表すと $e\left(\frac{n}{3}\pi\right)=\left\{e\left(\frac{\pi}{3}\right)\right\}^n$ から $e_n=e_1^n$, 2点 e_n, e_{n-1} の中点を μ_n とすると

$$\mu_n=\frac{1}{2}\left\{e\left(\frac{n}{3}\pi\right)+e\left(\frac{n-1}{3}\pi\right)\right\}=\cos\frac{\pi}{6}e\left(\frac{2n-1}{6}\pi\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}e\left(\frac{2n-1}{6}\pi\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}e\left(-\frac{\pi}{6}\right)e_1^n$$



ここで $\alpha_n=\frac{2n-1}{6}\pi$ とすると, μ_n の偏角は α_n , 直線 l_n の方向ベクトルの偏角は $\alpha_n+\frac{\pi}{2}$

または $\alpha_n-\frac{\pi}{2}$ (ここでは $\alpha_n\pm\frac{\pi}{2}$ とかく)

$l_n, z, R_n(z)$ について, 点 μ_n が O に重なるように平行移動し, 次に O の周りに

$-\alpha_n\mp\frac{\pi}{2}$ だけ回転すると, $z, R_n(z)$ は互いに共役な位置にくる。すなわち

$$\{R_n(z)-\mu_n\}e\left(-\alpha_n\mp\frac{\pi}{2}\right)=\overline{(z-\mu_n)e\left(-\alpha_n\mp\frac{\pi}{2}\right)}$$

$\overline{e(\theta)}=e(-\theta)=\frac{1}{e(\theta)}$ を用いると

$$R_n(z)-\mu_n=\overline{(z-\mu_n)}\left\{e\left(\alpha_n\pm\frac{\pi}{2}\right)\right\}^2 \quad \text{から} \quad R_n(z)-\mu_n=\overline{(z-\mu_n)}e(2\alpha_n\pm\pi)$$

$e(\theta+\pi)=e(\theta-\pi)$ だから $e(2\alpha_n\pm\pi)$ を $e(2\alpha_n+\pi)$ としてよい。よって

$$R_n(z)=e(2\alpha_n+\pi)\overline{z}+\mu_n-\overline{\mu_n}e(2\alpha_n+\pi)$$

ここで $\mu_n-\overline{\mu_n}e(2\alpha_n+\pi)=\frac{\sqrt{3}}{2}e(\alpha_n)-\frac{\sqrt{3}}{2}e(-\alpha_n)e(2\alpha_n)e(\pi)=\sqrt{3}e(\alpha_n)$

よって $R_n(z)=e\left(\frac{2n+2}{3}\pi\right)\overline{z}+\sqrt{3}e\left(\frac{2n-1}{6}\pi\right)$ から $\theta_1=\frac{2n+2}{3}\pi, \theta_2=\frac{2n-1}{6}\pi \dots(\text{答})$

$$\begin{aligned}
(2) \quad z_{n+1} &= R_n(z_n) = e\left(\frac{2n+2}{3}\pi\right) \overline{z_n} + \sqrt{3} e\left(\frac{2n-1}{6}\pi\right) \quad \text{これから} \\
\overline{z_{n+1}} &= e\left(-\frac{2n+2}{3}\pi\right) z_n + \sqrt{3} e\left(-\frac{2n-1}{6}\pi\right) \\
z_{n+2} &= R_{n+1}(z_{n+1}) = e\left(\frac{2n+4}{3}\pi\right) \overline{z_{n+1}} + \sqrt{3} e\left(\frac{2n+1}{6}\pi\right) \\
&= e\left(\frac{2n+4}{3}\pi\right) \left\{ e\left(-\frac{2n+2}{3}\pi\right) z_n + \sqrt{3} e\left(-\frac{2n-1}{6}\pi\right) \right\} + \sqrt{3} e\left(\frac{2n+1}{6}\pi\right) \\
&= e\left(\frac{2\pi}{3}\right) z_n + \sqrt{3} e\left(\frac{2n+9}{6}\pi\right) + \sqrt{3} e\left(\frac{2n+1}{6}\pi\right) \\
&= e\left(\frac{2\pi}{3}\right) z_n + \sqrt{3} \cdot 2 \cos \frac{2\pi}{3} e\left(\frac{2n+5}{6}\pi\right) = e_1^2 z_n - \sqrt{3} e\left(\frac{\pi}{2}\right) e_1^{n+1} \\
&= e_1^2 z_n + c e_1^{n+1} \quad \text{ただし } e_1 = e\left(\frac{\pi}{3}\right), c = -\sqrt{3} e\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sqrt{3} i
\end{aligned}$$

両辺を e_1^{n+1} で割ると $\frac{z_{n+2}}{e_1^{n+1}} = \frac{z_n}{e_1^{n-1}} + c$

(i) n が奇数のとき

$$\frac{z_n}{e_1^{n-1}} = \frac{z_1}{e_1^0} + c \cdot \frac{n-1}{2} \quad \text{から } z_n = e\left(\frac{n-1}{3}\pi\right) \left\{ a + bi - \frac{\sqrt{3}}{2}(n-1)i \right\} \quad \dots\dots(\text{答})$$

(ii) n が偶数のとき

$$\frac{z_n}{e_1^{n-1}} = \frac{z_2}{e_1^1} + c \cdot \frac{n-2}{2} \quad \text{から } \frac{z_n}{e_1^{n-2}} = z_2 + c e_1 \cdot \frac{n-2}{2}$$

$$\begin{aligned}
\text{ここで } z_2 &= R_1(z_1) = e\left(\frac{4\pi}{3}\right) \overline{z_1} + \sqrt{3} e\left(\frac{\pi}{6}\right) = e\left(\frac{4\pi}{3}\right) \overline{z_1} + \sqrt{3} e\left(\frac{4\pi}{3} - \frac{7\pi}{6}\right) \\
&= e\left(\frac{4\pi}{3}\right) \left\{ \overline{z_1} + \sqrt{3} e\left(-\frac{7\pi}{6}\right) \right\} = e\left(\frac{4\pi}{3}\right) \left(a - bi + \frac{-3 + \sqrt{3}i}{2} \right)
\end{aligned}$$

$$\text{また } c e_1 = -\sqrt{3} i e\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} i e(\pi) e\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} i e\left(\frac{4\pi}{3}\right) \quad \text{よって}$$

$$\begin{aligned}
\frac{z_n}{e_1^{n-2}} &= e\left(\frac{4\pi}{3}\right) \left(a - bi + \frac{-3 + \sqrt{3}i}{2} \right) + \sqrt{3} i e\left(\frac{4\pi}{3}\right) \cdot \frac{n-2}{2} \\
&= e_1^4 \left(a - bi + \frac{-3 + \sqrt{3}i}{2} + \sqrt{3} i \cdot \frac{n-2}{2} \right)
\end{aligned}$$

$$\text{したがって } z_n = e\left(\frac{n+2}{3}\pi\right) \left\{ a - bi - \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}(n-1)i \right\} \quad \dots\dots(\text{答})$$

感想

(1) の結果 $R_n(z) = e\left(\frac{2n+2}{3}\pi\right) \overline{z} + \sqrt{3} e\left(\frac{2n-1}{6}\pi\right)$ において, $\frac{2n+2}{3}\pi$ は ℓ_n の偏角の 2 倍, $\sqrt{3} e\left(\frac{2n-1}{6}\pi\right)$ は $2\mu_n$ となり, 図形的に納得できます。全体的に $e(\theta) = \cos\theta + i \sin\theta$ の性質を熟知しその計算に習熟していないと厳しいと思います。