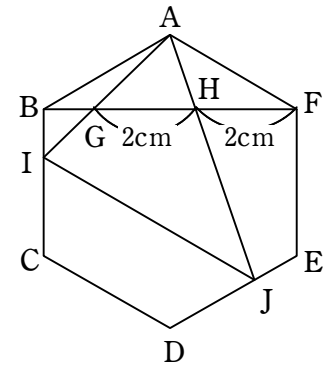


問題7

正六角形 $ABCDEF$ があります。対角線 BF の長さは 5 cm です。右の図のように、対角線 BF 上に2点 G, H があります。直線 AG と辺 BC が点 I で交わり、直線 AH と辺 DE が点 J で交わります。このとき、三角形 AIJ の面積は正六角形 $ABCDEF$ の面積の 倍です。



問題7の略解

まず、 $BI : BC, EJ : ED$ を求める。

右図で $\triangle GBI$ と $\triangle GKA$ は相似だから

$$BI : KA = GB : GK = 1 : 1.5$$

$BC = KA \times 2$ だから $BI : BC = 1 : 3$

また、 $\triangle HAB$ と $\triangle HJL$ は相似だから

$$AB : JL = HB : HL = 3 : 7$$

右図より $EJ : ED = 1 : 3$

次に、 $\triangle AIJ$ と正六角形 $ABCDEF$ の面積比を考える。

正六角形 $ABCDEF$ の面積を1とすると

$$\triangle OAB = \frac{1}{6}, \triangle JAB = \triangle OAB \times 2 = \frac{1}{3}$$

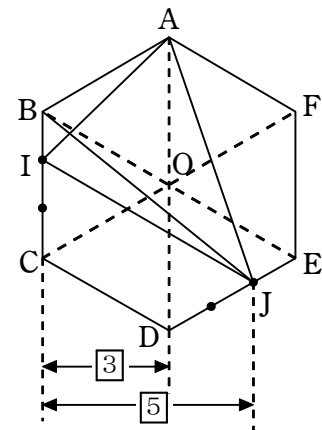
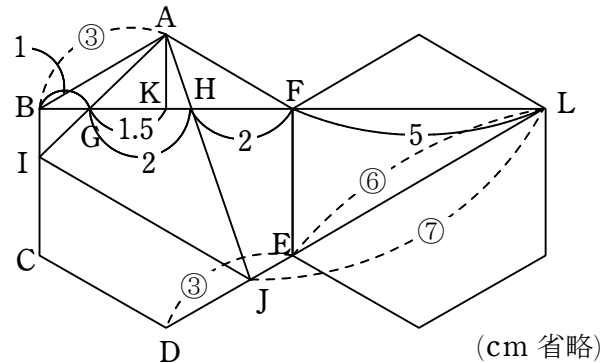
$$\triangle ABI = \triangle OBI = \triangle OBC \times \frac{1}{3} = \frac{1}{18}$$

$$\triangle JBI = \triangle ABI \times \frac{5}{3} = \frac{5}{54}$$

これから

$$\triangle AIJ = \triangle JAB + \triangle JBI - \triangle ABI = \frac{1}{3} + \frac{5}{54} - \frac{1}{18} = \frac{10}{27}$$

すなわち、 $\triangle AIJ$ の面積は正六角形 $ABCDEF$ の面積の $\boxed{\frac{10}{27}}$ 倍。



問題7の別解

正六角形 $ABCDEF$ の面積を1とすると、 $\triangle ABF = \frac{1}{6}$, $\triangle AGH = \triangle ABF \times \frac{2}{5} = \frac{1}{15}$

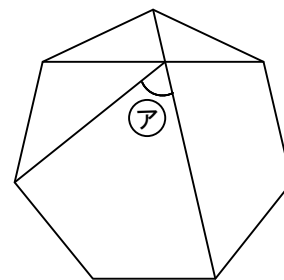
ここで $\triangle AGH$ と $\triangle AIJ$ の面積比を利用する。上の図から

$$AG : GI = KG : GB = 3 : 2, AH : HJ = BH : HL = 3 : 7$$

$$\text{よって } \triangle AIJ = \triangle AGH \times \frac{5}{3} \times \frac{10}{3} = \frac{10}{27}$$

問題 8

右の図のように、正七角形の 2 本の対角線が交わる点と 1 つの頂点を直線で結びました。角アの大きさは 度です。



問題 8 の略解

$$\frac{180^\circ}{7} = \bullet \text{ とおくと } 180^\circ = \bullet \times 7, \text{ また } \bullet \times \frac{1}{2} = \circ = \frac{90^\circ}{7} \text{ とする。}$$

正七角形の内角の和は $180^\circ \times 5$ だから、1 つの内角は

$$\frac{180^\circ \times 5}{7} = \bullet \times 5$$

$$AB=AG \text{ から } \angle ABG = \angle AGB = (180^\circ - \bullet \times 5) \times \frac{1}{2} = \bullet$$

$$AE \text{ と } GF \text{ は平行だから } \angle GAH = 180^\circ - \bullet \times 5 = \bullet \times 2$$

$\triangle BAH$ において

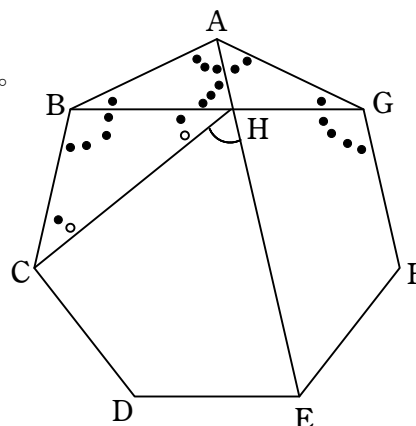
$$\angle BAH = \bullet \times 5 - \bullet \times 2 = \bullet \times 3, \quad \angle BHA = \angle GAH + \angle AGH = \bullet \times 3$$

$$\angle BAH = \angle BHA \text{ だから } BA = BH,$$

$$\triangle BCH \text{ は } BC = BH \text{ だから } \angle BCH = \angle BHC = (180^\circ - \bullet \times 4) \times \frac{1}{2} = \bullet \times \frac{3}{2} = \bullet + \circ$$

したがって

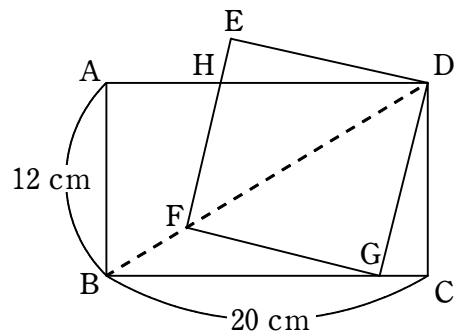
$$\angle CHE = 180^\circ - \angle BHA - \angle BHC = \bullet \times 2 + \circ = \boxed{\frac{450^\circ}{7}}$$



追記 上の略解では $\angle BAH = \angle BHA$ から $BA = BH$ としましたが、正七角形の対称性から BD と AE , BG と DE が平行すなわち四角形 $BDEH$ は平行四辺形であり、 $BH = DE = BC$ がすぐいえます。図形問題ではこんな簡単なことにも気付けないことがあります。

問題 9

右の図で、四角形 $ABCD$ は長方形、四角形 $DEFG$ は正方形です。点 F は対角線 BD 上にあり、点 G は辺 BC 上にあります。このとき、 GC の長さは ① cm です。
また、辺 AD と辺 EF が交わる点を H とすると、 AH の長さは ② cm です。



問題 9 の略解

右図のように正方形 $IJCK$ をつくる。 $\triangle IFE$, $\triangle JGF$, $\triangle CDG$, $\triangle KED$ はすべて合同な直角三角形である。
 $\triangle FLD$ と $\triangle BCD$ は相似だから

$$FL : DL = BC : DC = 20 : 12 = 5 : 3$$

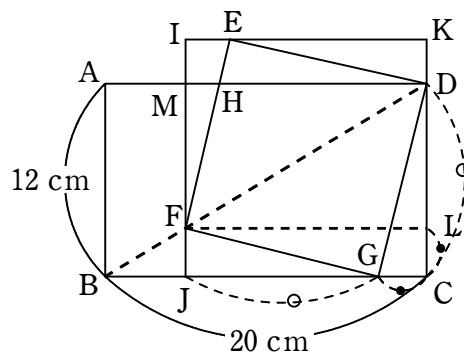
$JG = DC = \bigcirc$, $GC = LC = \bullet$ とすると

$$(\bigcirc + \bullet) : (\bigcirc - \bullet) = 5 : 3 \quad \text{だから} \quad \bigcirc : \bullet = 4 : 1$$

$\bigcirc = 12 \text{ cm}$ から $\bullet = 3 \text{ cm}$ すなわち $GC = \boxed{3} \text{ cm}$

$$AM = 20 - 12 - 3 = 5, \quad MF = 12 - 3 = 9$$

$$FI : IE = 4 : 1 \quad \text{から} \quad MH = 9 \times \frac{1}{4} = 2.25 \quad \text{よって} \quad AH = 5 + 2.25 = \boxed{7.25} \text{ cm}$$



問題 9 ① の別解

右図のように正方形 $DEFG$ の対角線の交点を J とすると、 $\triangle DJG$ は直角二等辺三角形、 $\triangle DIJ$ と $\triangle JKG$ は合同な直角三角形で $\triangle DAB$ に相似だから

$$DI : IJ = JK : KG = DA : AB = 20 : 12 = 5 : 3$$

$DC = \textcircled{3} + \textcircled{5} = \textcircled{8} = 12 \text{ cm}$ から $\textcircled{1} = 1.5 \text{ cm}$ よって

$$GC = \textcircled{5} - \textcircled{3} = \textcircled{2} = 3 \text{ cm}$$

