

問題 今有如図大小星円十五宿 只云角亢二星周寸相併老十寸 又云心尾箕星周寸相併廿七寸五分
重云虚危室壁奎五星周相併四十寸 問角星周寸



今、図の如く、大小の十五宿の星の名を持つ円が並んでいる。角星と亢星の周の長さを足すと十寸である。また心星と尾星と箕星の周の長さを足すと二十七寸五分である。さらに虚星，危星，室星，壁星，奎星の五つの星の周の長さを足すと四十寸である。角星の周の長さは何寸であるか問う。

解法 第 n 番目の星の周を a_n とすると，問題の条件は

$$a_1 + a_2 = 10 \cdots \textcircled{1}, \quad a_5 + a_6 + a_7 = 27.5 \cdots \textcircled{2}, \quad a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15} = 40 \cdots \textcircled{3}$$

と表される。これ以外に条件がなければ a_n は決められないが，小説の文脈から数列 $\{a_n\}$ の階差に何か規則性のあることがうかがわれる。そこで，一番単純に，階差数列が等差数列であると仮定すると， a_n は n の 2 次多項式となり，上の 3 つの条件から，係数を決めることができる。

$$a_n = pn^2 + qn + r \cdots \cdots (*)$$

と仮定すると，①，②，③は

$$5p + 3q + 2r = 10 \cdots \textcircled{1}', \quad 110p + 18q + 3r = 27.5 \cdots \textcircled{2}', \quad 855p + 65q + 5r = 40 \cdots \textcircled{3}'$$

①' と ②'，①' と ③' から r を消去すると

$$205p + 27q = 25 \cdots \textcircled{4}, \quad 337p + 23q = 6 \cdots \textcircled{5}$$

$$\textcircled{4}, \textcircled{5} \text{ を連立して解くと } p = -\frac{413}{4384}, \quad q = \frac{7195}{4384}, \quad r = \frac{12160}{4384} = \frac{380}{137}$$

これから $a_1 = p + q + r = \frac{18942}{4384} = \frac{9471}{2192} \approx 4.32072$ が得られる。

考察 この解には

(1) a_1 の値が小説中の解 4.5 に一致しない

(2) $a_1 < a_2 < \cdots < a_9, a_9 > a_{10} > \cdots > a_{15}$ となり， a_n が単調に増加しない

という 2 つの難点がある。(*) の仮定自体に問題があるかどうかは不明だが，条件 ①～③ の右辺の数値を修正すれば，これらの難点を除くことができる。たとえば

$$a_1 + a_2 = 10.4, \quad a_5 + a_6 + a_7 = 31.4, \quad a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15} = 73$$

とすれば $a_n = \frac{1}{20}(-n^2 + 31n + 60)$ ， $a_1 = 4.5$ となる。

与える星の組合せを変えて

$$a_2 + a_3 = 10.5, \quad a_4 + a_5 + a_6 = 27, \quad a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15} = 195$$

とすると $a_n = \frac{1}{14}(3n^2 - 2n + 59)$ ， $a_1 = \frac{30}{7}$ という解もある。