

「和算に挑戦」

一関市博物館では毎年「和算に挑戦」というイベントを主催していて、上級、中級、初級の3題が出題され、解答を募集しています。平成21年度は第8回で、平成22年1月31日が締切でした。詳しくは以下から参照できます。

<http://www.museum.city.ichinoseki.iwate.jp/icm/06events/index.html>

(あるいは 一関市博物館ホームページ → 催し物案内 → 和算に挑戦)

平成18年度中級の問題は、一関の和算家 千葉胤秀(ちばたねひで)の編集した

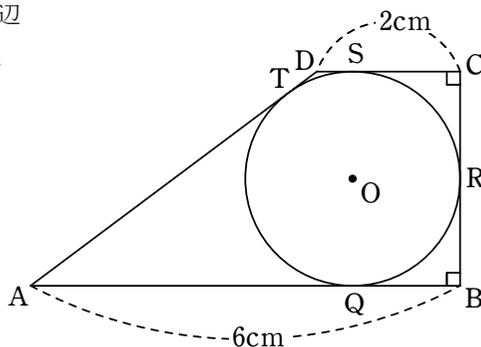
『算法新書』(文政13(1830)年刊行)巻の二 「容術」(内接に関する問題)の項10問目に基づく出題でした。中学生にとって適度な問題であると同時に、様々な解法が考えられる良問だと思われます。

問題 右図のような $\angle B = \angle C = 90^\circ$ の台形ABCDの各辺に円OがQ, R, S, Tで接している。AB=6cm, DC=2cmのとき、円Oの直径を求めよ。

参考 円の直径を d , $AB=a$, $DC=b$ とすると

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$$

が成り立つ。(d は a , b の調和平均)



解1は、円外の点から円にひいた2つの接線の長さが等しいことと、ピタゴラスの定理を使った解き方、解2は相似を用いた解き方です。

解1 点Dから辺ABに垂線をひき、交点をHとする。
 円の半径を x とすると、四角形OQBR, SORCは正方形であるから

$$QB=SC=x \text{ より } AQ=6-x, DS=2-x$$

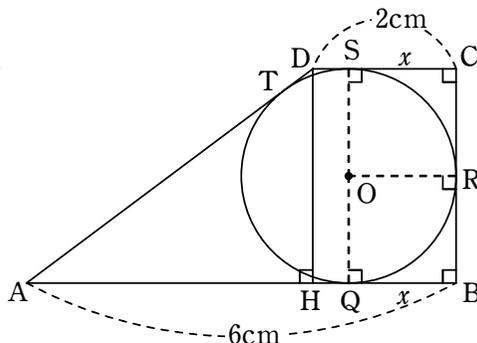
ゆえに

$$AD=AT+DT=AQ+DS=8-2x$$

直角三角形AHDにおいて

$$AD^2=AH^2+DH^2 \text{ すなわち } (8-2x)^2=4^2+(2x)^2$$

$$64-32x=16 \text{ ゆえに } x=\frac{3}{2} \text{ したがって直径は } 3 \text{ cm}$$



解2 AOは $\angle DAB$ の二等分線、DOは $\angle ADC$ の二等分線であり

$$\angle DAB + \angle ADC = 180^\circ \text{ より } \angle AOD = 90^\circ$$

2組の角がそれぞれ等しいから

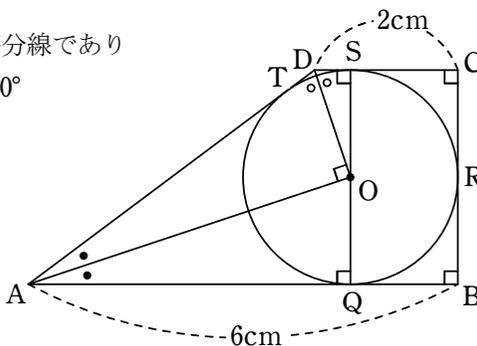
$$\triangle AOD \sim \triangle AQO \sim \triangle OSD$$

円の半径を x とすると

$$AQ : OS = QO : SD \text{ より}$$

$$(6-x) : x = x : (2-x)$$

$$12-8x=0 \text{ ゆえに } 2x=3 \text{ (cm)}$$



四角形ABCDが円に外接しているから $AB+CD=BC+DA$ 、これと相似を利用すると、未知数 x をおかない解き方ができる。

解3 DからABに垂線をひき交点をHとする。ADの延長上に $DE=DH$ となる点Eをとる。

Eを通りAEに垂直な直線をひき、ABの延長との交点をFとする。

$$AE=AD+DH=AD+BC=AB+CD=8$$

2組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle AHD \sim \triangle AEF \text{ 相似比は } AH : AE = 1 : 2$$

直角三角形の斜辺と他の一辺がそれぞれ等しいから

$$\triangle DHF \equiv \triangle DEF$$

$\triangle AHD$ の面積を1とすると、 $\triangle AEF$ の面積は4、

四角形DHFEの面積は3、よって $\triangle DHF$ の面積

は1.5となる。

$$AH : HF = \triangle AHD : \triangle DHF = 1 : 1.5 \text{ よって } HF = 4 \times 1.5 = 6$$

また $HF = EF = 2DH$ であるから $DH = 3$ これが円の直径に等しい。

