

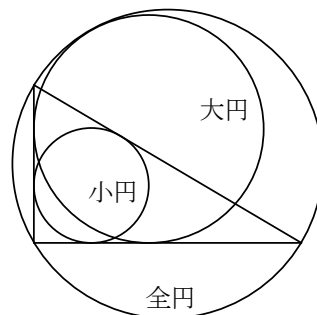
一関市博物館主催「和算に挑戦」平成 20 年度中級問題

天保 12 年 (1841年) に根城八幡宮 (大船渡市) に奉納された算額の問題

問題 今有全円内如図設勾股容大小円一寸

問大円径幾何

今、図のように全円の中に直角三角形と大小の円がある。
その小円の直径が 1 寸のとき、大円の直径はいくらか。
(全円は直角三角形に外接し、小円は直角三角形に内接、
大円は直角三角形の 2 辺と大円に接している。)



解 図のように、全円、大円、小円の中心をそれぞれ C_2 , C_1 , C_0 とし、半径をそれぞれ R , r , r_0 とする。直角三角形を OAB とし、 O を原点、 OA , OB にそってそれぞれ x 軸, y 軸をとる。 $A(a, 0)$, $B(0, b)$ とすると、全円は直角三角形 OAB に外接するから、その中心 C_2 は AB の中点であり $C_2\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$

大円と小円は OA , OB に接するから中心の座標は

$$C_1(r, r), C_0(r_0, r_0)$$

大円は全円に内接するから、中心間の距離を d とすると

$$d=R-r \text{ より } d^2=(R-r)^2$$

$$\text{すなわち } \left(\frac{a}{2}-r\right)^2+\left(\frac{b}{2}-r\right)^2=(R-r)^2$$

$$\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-(a+b)r+2r^2=R^2-2Rr+r^2$$

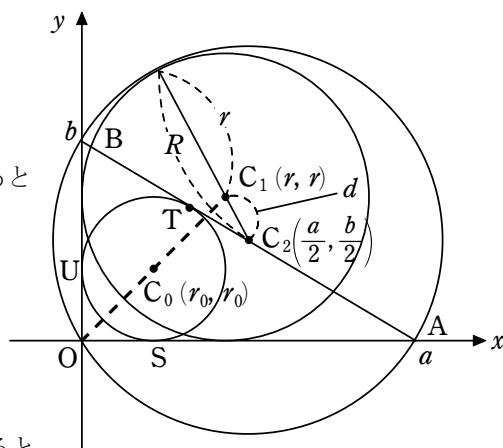
ここで $R^2=OC_1^2=\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}$ であり、 $r \neq 0$ を用いると

$$R^2-(a+b)r+2r^2=R^2-2Rr+r^2 \text{ より } r=a+b-2R$$

小円と OA , AB , OB の接点をそれぞれ S , T , U とすると

$$2R=AB=AT+BT=AS+BU=a-r_0+b-r_0$$

したがって $r=2r_0$, $2r_0=1$ のとき大円の直径は $2r=2$



一般化 AB を小円に接するように動かしても状況は変わらないことから次の定理が得られる。

「直交する 2 直線 l , m に、直径の比が $1:2$ の 2 つの円 C_0 , C_1 が同じ側で接している。

C_0 の周上の任意の点 T における接線 n が 2 直線 l , m とそれぞれ点 A , B で交わるとき、 AB を直径とする円 C_2 は円 C_1 に接する。」

C_0 , C_1 の直径の比を適当にとれば、 l , m が直交しなくても、成り立つ。

