

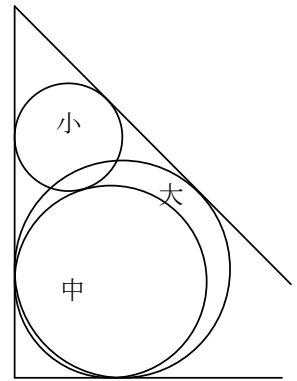
一関市博物館主催「和算に挑戦」平成18年度上級問題

『算法新書』(文政13(1830)年刊行)巻の二「容術」の項 20 問目

問題 勾股の内へ図の如く大中小の三円を容れる有り

大径一十八寸, 中径一十六寸, 小径九寸, 勾何程と問う

(直角三角形の中に図のように大中小の三円をいれる。大円の直径が 18 寸, 中円の直径が 16 寸, 小円の直径が 9 寸のとき, 直角三角形の短辺は何寸か。)



解 図のように、大中小の円の中心をそれぞれ O_1, O_2, O_3 , 直径を d_1, d_2, d_3 , 辺 AB との接点を H_1, H_2, H_3 とする。

O_3 から O_2H_2 へ垂線をひき交点を G とし, O_3G と円 O_3 の交点から AB へ垂線をひき交点を H とする。
 $\triangle O_2O_3G$ についてピタゴラスの定理を用いると

$$\begin{aligned} O_3G^2 &= O_2O_3^2 - O_2G^2 \\ &= \left(\frac{d_2}{2} + \frac{d_3}{2}\right)^2 - \left(\frac{d_2}{2} - \frac{d_3}{2}\right)^2 = d_2d_3 \end{aligned}$$

ゆえに $H_3H_2 = O_3G = \sqrt{d_2d_3}$ …… (*)

(外接する 2 円の共通接線の長さは 2 円の直径の相乗平均!)

$$\text{これから } HB = \sqrt{d_2d_3} + \frac{d_2}{2} - \frac{d_3}{2}$$

円 O_1, O_3 は A を相似の中心とする相似の位置にあり, 相似比は $d_1 : d_3$ であるから

$$AB : AH = d_1 : d_3$$

$$AB : HB = d_1 : (d_1 - d_3)$$

したがって

$$\begin{aligned} AB &= HB \times \frac{d_1}{d_1 - d_3} \\ &= \left(\sqrt{d_2d_3} + \frac{d_2}{2} - \frac{d_3}{2}\right) \frac{d_1}{d_1 - d_3} \end{aligned}$$

$d_1 = 18, d_2 = 16, d_3 = 9$ のとき

$$AB = \left(\sqrt{16 \times 9} + \frac{16}{2} - \frac{9}{2}\right) \times \frac{18}{18 - 9} = 31$$

参考 (*) について

右図で, 3 点 A, T, C および B, T, D が 1 直線上にあること (自明ではないと思う) が証明できるから

$$\triangle ABC \sim \triangle BCD$$

となり

$$BC^2 = AB \times CD$$

がいえる。

