

対称式

対称式とは、変数を入れ替えても変わらない多項式をいう。たとえば2変数の多項式

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2$$

において、 x, y を入れ替えた式

$$f(y, x) = y^2 + yx + x^2$$

は $f(y, x) = f(x, y)$ を満たすから、 $f(x, y)$ は対称式である。

類似したものに**交代式**がある。交代式とは、変数を入れ替えると符号のみが変わる多項式をいう。

たとえば、次の $g(x, y)$ は交代式である。

$$g(x, y) = x^2 - y^2$$

$$g(y, x) = y^2 - x^2 = -(x^2 - y^2) = -g(x, y)$$

交代式を2乗した式や、交代式の偶数個の積などは対称式である。

$$(x - y)(x^2 - y^2) \quad \text{など}$$

2変数 x, y の任意の対称式は、基本対称式 $x + y, xy$ の多項式で表される。

たとえば、 $s = x + y, p = xy$ とおくと

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = s^2 - 2p$$

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = s^3 - 3ps$$

一般に、 n を自然数とすると

$$\begin{aligned} (x^{n+1} + y^{n+1})(x + y) &= x^{n+2} + y^{n+2} + x^{n+1}y + xy^{n+1} \\ &= x^{n+2} + y^{n+2} + xy(x^n + y^n) \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} x^{n+2} + y^{n+2} &= (x^{n+1} + y^{n+1})(x + y) - xy(x^n + y^n) \\ &= s(x^{n+1} + y^{n+1}) - p(x^n + y^n) \end{aligned}$$

となり、 $x^n + y^n, x^{n+1} + y^{n+1}$ が s, p で表されると、 $x^{n+2} + y^{n+2}$ も s, p で表される。

たとえば、 $n = 2$ のとき

$$\begin{aligned} x^4 + y^4 &= s(x^3 + y^3) - p(x^2 + y^2) \\ &= s(s^3 - 3ps) - p(s^2 - 2p) = s^4 - 4ps^2 + 2p^2 \end{aligned}$$

対称式概念は、**分数式**にも拡張することができる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y-1} &= \frac{(y-1) + (x-1)}{(x-1)(y-1)} = \frac{x+y-2}{xy - (x+y) + 1} = \frac{s-2}{p-s+1} \\ \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} &= \frac{x^3 + y^3}{xy} = \frac{s^3 - 3ps}{p} \quad \text{など} \end{aligned}$$

また、対称式概念は、3変数以上の多項式や分数式（有理式）にも拡張できる。たとえば、**3変数の多項式**

$$f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3$$

は、どの2つの変数を入れ替えても、元の多項式と変わらない式である。

3変数の多項式の基本対称式は $x + y + z, xy + yz + zx, xyz$ である。

$s = x + y + z, p = xy + yz + zx, q = xyz$ とおくと

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx) = s^2 - 2p$$

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 &= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) + 3xyz \quad \dots\dots \textcircled{1} \\ &= s(s^2 - 2p - p) + 3q = s^3 - 3ps + 3q \end{aligned}$$

参考 ①は次の因数分解から導かれる。

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz &= (x + y)^3 - 3xy(x + y) + z^3 - 3xyz \\ &= (x + y)^3 + z^3 - 3xy(x + y + z) \\ &= [(x + y) + z]\{(x + y)^2 - (x + y)z + z^2\} - 3xy(x + y + z) \\ &= (x + y + z)\{(x + y)^2 - (x + y)z + z^2 - 3xy\} \\ &= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) \end{aligned}$$

練習 (1) $(xy + yz + zx)(x + y + z) - xyz$ を因数分解せよ。

(2) $x^2(y + z) + y^2(z + x) + z^2(x + y)$ を基本対称式を用いて表せ。

(3) $x^3(y + z) + y^3(z + x) + z^3(x + y)$ を基本対称式を用いて表せ。

(4) $x^{n+3} + y^{n+3} + z^{n+3} = s(x^{n+2} + y^{n+2} + z^{n+2}) - p(x^{n+1} + y^{n+1} + z^{n+1}) + q(x^n + y^n + z^n)$ を証明せよ。

解答 (1) $(x + y)(y + z)(z + x)$ (2) $ps - 3q$ (3) $ps^2 - 2p^2 - qs$