

## 整数解問題

方程式  $5x+7y=1$  あるいは方程式  $xy+3x+y=2$  のように、方程式の個数が未知数の個数よりも少ないものを「不定方程式」という。このとき、解  $(x, y)$  は、一般には一通りに定まらず、無数の組み合わせがある。しかし、 $x, y$  に整数あるいは自然数といった条件があると、限定された解が得られる。これが不定方程式の「整数解問題」である。

### ■ 1次不定方程式 $ax+by+c=0$ を解く

整数解問題の基本は「約数倍数関係」を用いることである。すなわち、 $x, y$  を整数として

$$ax=by \quad (a, b \text{ は互いに素な整数})$$

ならば、 $x$  は  $b$  の倍数であり、 $y$  は  $a$  の倍数である。たとえば

$$6x=7y$$

ならば、 $x$  は  $7$  の倍数であるから、 $n$  を整数として  $x=7n$  とおける。すると

$$6 \cdot 7n=7y \quad \text{より} \quad y=6n$$

である。すなわち、解は  $(x, y)=(7n, 6n)$  ( $n$  は整数) である。

**例題1**  $5x+7y=1$  を満たす整数の組  $(x, y)$  をすべて求めよ。

**方針** まず、この方程式の解をひとつ見つける。それには、 $5$  の倍数、 $7$  の倍数を書き出して

$$0, 5, 10, 15, \dots \quad 0, 7, 14, 21, \dots$$

これらを見比べ  $15-14=1$  より  $5 \cdot 3+7 \cdot (-2)=1$  であるから、 $x=3, y=-2$  がひとつの解となる。すると、これから

$$\begin{array}{r} 5x+7y=1 \\ -) \quad 5 \cdot 3+7 \cdot (-2)=1 \\ \hline 5(x-3)+7(y+2)=0 \end{array}$$

として  $5(x-3)=-7(y+2)$  の形に変形できる。この手順はあらわに書かなくてもよい。

**解** 与えられた方程式を変形して

$$5(x-3)=-7(y+2) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$x-3$  は  $7$  の倍数だから、 $n$  を整数として

$$x-3=7n$$

となる。これを  $\textcircled{1}$  に代入して

$$5 \cdot 7n=-7(y+2) \quad \text{よって} \quad y+2=-5n$$

したがって  $x=7n+3, y=-5n-2$  (ただし  $n$  は整数)

**例題2** 100 以下の自然数で、 $5$  で割ると  $2$  余り、 $6$  で割ると  $5$  余る数を求めよ。

**解** 求める数を  $N$  とし、 $m, n$  を整数とすると

$$N=5m+2=6n+5 \quad \text{これから} \quad 5m-6n=3 \quad \leftarrow \text{ひとつの解は } 5 \cdot 3-6 \cdot 2=3$$

これを变形して  $5(m-3)=6(n-2)$  ゆえに  $k$  を整数として

$$m-3=6k, n-2=5k \quad \text{すなわち} \quad m=6k+3, n=5k+2$$

したがって  $N=5m+2=5(6k+3)+2=30k+17$

$1 \leq N \leq 100$  より  $k=0, 1, 2$  ゆえに  $N=17, 47, 77$

### ■ 「積の形」をつくる

「約数倍数関係」を用いるもう 1 つの方法は、「積の形」をつくることである。 $x, y$  を整数として

$$xy=a \quad (a \text{ は整数})$$

ならば、 $x, y$  は  $a$  の約数となる。たとえば

$$xy=-9$$

の整数解は  $(x, y)=(1, -9), (3, -3), (9, -1), (-1, 9), (-3, 3), (-9, 1)$  である。

**例題3**  $xy+3x+y=2$  を満たす整数の組  $(x, y)$  をすべて求めよ。

**解** 与えられた方程式は

$$(x+1)(y+3)-3=2 \quad \text{より} \quad (x+1)(y+3)=5$$

$x+1, y+3$  は整数であるから

$$(x+1, y+3)=(1, 5), (5, 1), (-1, -5), (-5, -1)$$

したがって  $(x, y)=(0, 2), (4, -2), (-2, -8), (-6, -4)$

**別解** 与えられた方程式を  $x$  について解くと

$$(y+3)x=-y+2 \quad \text{より} \quad x=\frac{-y+2}{y+3}=\frac{-(y+3)+5}{y+3}=-1+\frac{5}{y+3}$$

$x$  は整数だから、 $\frac{5}{y+3}$  も整数、よって  $y+3$  は  $5$  の約数である。(以下略)

**例題4**  $3xy+x+2y=10$  を満たす自然数の組  $(x, y)$  をすべて求めよ。

**解** 与式の両辺を  $3$  倍して  $9xy+3x+6y=30$  ことから  $(3x+2)(3x+1)=32$

$x, y$  は自然数だから  $3x+2 \geq 5, 3x+1 \geq 4$  となることを考慮すると

$$3x+2=8, 3x+1=4 \quad \text{よって} \quad x=2, y=1$$

例題5  $\frac{2}{x} + \frac{5}{y} = 2$  を満たす自然数の組  $(x, y)$  をすべて求めよ。

解 与式の両辺に  $xy$  をかけて分母をはらうと  $2x + 5y = 2xy$  より

$$2xy - 5x - 2y = 0 \quad \text{これから} \quad (x-1)(2y-5) = 5$$

$x$  は自然数だから  $x-1 \geq 0$

$$(x-1, 2y-5) = (1, 5), (5, 1) \quad \text{よって} \quad (x, y) = (2, 5), (6, 3)$$

例題6  $x^2 + 3x + xy + 2y - 128 = 0$  を満たす自然数の組  $(x, y)$  をすべて求めよ。

ヒント まず次数の低い文字  $y$  に着目すると  $(x+2)y$  となる項があるので  $(x+2)$  との積を考える。

解 与えられた方程式から

$$x^2 + 3x + 2 + (x+2)y = 128 + 2 \quad \text{より} \quad (x+2)(x+1) + (x+2)y = 130$$

$$\text{よって} \quad (x+2)(x+y+1) = 130$$

$x, y$  は自然数だから  $x+2 \geq 3, x+y+1 \geq 3$  また  $x+y+1 \geq x+2$  であるから

$$(x+2, x+y+1) = (5, 26), (10, 13)$$

$$\text{よって} \quad (x, y) = (3, 22), (8, 4)$$

例題7  $x^2 - 8x + 1$  が平方数(整数の2乗)となるような整数  $x$  をすべて求めよ。

解  $k$  を0以上の整数として  $x^2 - 8x + 1 = k^2$  とおく。また、 $x$  について平方完成すると

$$(x-4)^2 - 16 + 1 = k^2 \quad \text{より} \quad (x-4)^2 - k^2 = 15$$

$$\text{よって} \quad (x-4+k)(x-4-k) = 15$$

$x-4+k, x-4-k$  は整数で  $x-4+k \geq x-4-k$  であるから

$$(x-4+k, x-4-k) = (15, 1), (5, 3), (-1, -15), (-3, -5) \quad \dots \textcircled{1}$$

ここで  $x-4+k = a, x-4-k = b$  とおいて、 $x, k$  について解くと

$$x = \frac{a+b}{2} + 4, \quad k = \frac{a-b}{2}$$

①の4つの場合のすべてで  $k$  は0以上の整数となり  $x = 12, 8, -4, 0$

### ■ 1つの文字について解く

例題8  $x^2 - 8x + 3y = 2$  を満たす自然数の組  $(x, y)$  をすべて求めよ。

解 解の公式を用いて、 $x$  について解くと

$$x = 4 \pm \sqrt{18 - 3y}$$

$18 - 3y \geq 0$  であり、 $y$  は自然数だから  $1 \leq y \leq 6$  このとき

$$(y, 18 - 3y) = (1, 15), (2, 12), (3, 9), (4, 6), (5, 3), (6, 0)$$

$\sqrt{18 - 3y}$  が整数となるのは  $y = 3, 6$  のときであるから

$$(x, y) = (1, 3), (7, 3), (4, 6)$$

### ■ 不等式をつくり、未知数の範囲を絞り込む

例題9  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \quad \dots \textcircled{1}$  を満たす自然数の組  $(x, y, z)$  をすべて求めよ。ただし、 $x \leq y \leq z$  とする。

解  $x \leq y \leq z$  より  $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{y} \geq \frac{1}{z}$  だから  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x}$

①より  $1 \leq \frac{3}{x}$  よって  $x \leq 3$ 、 $x$  は自然数であるから  $x = 1, 2, 3$

(i)  $x = 1$  のとき、①を満たす自然数  $y, z$  は存在しない。

(ii)  $x = 2$  のとき、①は

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \quad \text{より} \quad \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2} \quad \dots \textcircled{2}$$

ここで  $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{1}{y} + \frac{1}{y}$  であるから  $\frac{1}{2} \leq \frac{2}{y}$ 、よって  $2 \leq y \leq 4$

$y = 2, 3, 4$  のうち、②を満たすのは

$$(y, z) = (3, 6), (4, 4)$$

(iii)  $x = 3$  のとき、①は

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{2}{3}$$

(ii)と同様にして、 $\frac{2}{3} \leq \frac{2}{y}$  よって  $y \leq 3$ 、②を満たすのは  $(y, z) = (3, 3)$

以上をまとめて

$$(x, y, z) = (2, 3, 6), (2, 4, 4), (3, 3, 3)$$