

### 華麗なる三角関数の等式その3

問題1 次の等式を証明せよ。

(1)  $\cos \alpha + \cos(\alpha + 120^\circ) + \cos(\alpha - 120^\circ) = 0$  …… ①

(2)  $\cos 10^\circ - \cos 50^\circ - \cos 70^\circ = 0$       (3)  $\cos 20^\circ - \cos 40^\circ - \cos 80^\circ = 0$

(4)  $\sin 10^\circ + \sin 50^\circ - \sin 70^\circ = 0$       (5)  $\sin 20^\circ + \sin 40^\circ - \sin 80^\circ = 0$

問題2 次の等式を証明せよ。

(1)  $\cos^2 \alpha + \cos^2(\alpha + 120^\circ) + \cos^2(\alpha - 120^\circ) = \frac{3}{2}$  …… ②

(2)  $\cos^2 20^\circ + \cos^2 40^\circ + \cos^2 80^\circ = \frac{3}{2}$       (3)  $\sin^2 20^\circ + \sin^2 40^\circ + \sin^2 80^\circ = \frac{3}{2}$

問題3 次の等式を証明せよ。

(1)  $\cos^3 \alpha + \cos^3(\alpha + 120^\circ) + \cos^3(\alpha - 120^\circ) = \frac{3}{4} \cos 3\alpha$  …… ③

(2)  $\cos^3 20^\circ - \cos^3 40^\circ - \cos^3 80^\circ = \frac{3}{8}$       (3)  $\sin^3 20^\circ + \sin^3 40^\circ - \sin^3 80^\circ = -\frac{3\sqrt{3}}{8}$

問題4  $a + b + c = 0$  のとき  $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$  が成り立つことを利用して

$$\cos \alpha \cos(\alpha + 120^\circ) \cos(\alpha - 120^\circ) = \frac{1}{4} \cos 3\alpha \quad \dots\dots ④$$

を導け。また、次の等式を証明せよ。

$$\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{8} \quad \dots\dots ⑤, \quad \tan 20^\circ \tan 40^\circ \tan 80^\circ = \sqrt{3}$$

### 華麗なる三角関数の等式その3

問題1 次の等式を証明せよ。

- (1)  $\cos\alpha + \cos(\alpha + 120^\circ) + \cos(\alpha - 120^\circ) = 0$  …… ①  
 (2)  $\cos 10^\circ - \cos 50^\circ - \cos 70^\circ = 0$       (3)  $\cos 20^\circ - \cos 40^\circ - \cos 80^\circ = 0$   
 (4)  $\sin 10^\circ + \sin 50^\circ - \sin 70^\circ = 0$       (5)  $\sin 20^\circ + \sin 40^\circ - \sin 80^\circ = 0$

解  $\cos\alpha + \cos(\alpha + 120^\circ) + \cos(\alpha - 120^\circ) = \cos\alpha + 2\cos\alpha\cos 120^\circ = 0$  …… (1)  
 ①において、 $\alpha = 10^\circ$  とおき、 $\cos(180^\circ - \theta) = \cos(\theta - 180^\circ) = -\cos\theta$  を用いると  
 $\cos 10^\circ + \cos 130^\circ + \cos(-110^\circ) = 0$  より  $\cos 10^\circ - \cos 50^\circ - \cos 70^\circ = 0$  …… (2)  
 また、 $\cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta$  を用いると  
 $\sin 80^\circ - \sin 40^\circ - \sin 20^\circ = 0$  より  $\sin 20^\circ + \sin 40^\circ - \sin 80^\circ = 0$  …… (5)  
 ①において、 $\alpha = 20^\circ$  とおくと  
 $\cos 20^\circ + \cos 140^\circ + \cos(-100^\circ) = 0$  より  $\cos 20^\circ - \cos 40^\circ - \cos 80^\circ = 0$  …… (3)  
 $\sin 70^\circ - \sin 50^\circ - \sin 10^\circ = 0$  より  $\sin 10^\circ + \sin 50^\circ - \sin 70^\circ = 0$  …… (4)

参考 単位円に内接する正三角形 ABC の頂点の座標を

$$A(\cos\alpha, \sin\alpha), B(\cos(\alpha + 120^\circ), \sin(\alpha + 120^\circ)), C(\cos(\alpha - 120^\circ), \sin(\alpha - 120^\circ))$$

とおくと、 $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{0}$  であるから、両辺の  $x, y$  成分をとると

$$\cos\alpha + \cos(\alpha + 120^\circ) + \cos(\alpha - 120^\circ) = 0 \quad \dots\dots \text{①}$$

$$\sin\alpha + \sin(\alpha + 120^\circ) + \sin(\alpha - 120^\circ) = 0$$

また、 $\alpha + 120^\circ = 180^\circ - (60^\circ - \alpha)$ 、 $\alpha - 120^\circ = (60^\circ + \alpha) - 180^\circ$  を用いると

$$\cos\alpha - \cos(60^\circ - \alpha) - \cos(60^\circ + \alpha) = 0, \quad \sin\alpha + \sin(60^\circ - \alpha) - \sin(60^\circ + \alpha) = 0$$

問題2 次の等式を証明せよ。

- (1)  $\cos^2\alpha + \cos^2(\alpha + 120^\circ) + \cos^2(\alpha - 120^\circ) = \frac{3}{2}$  …… ②  
 (2)  $\cos^2 20^\circ + \cos^2 40^\circ + \cos^2 80^\circ = \frac{3}{2}$       (3)  $\sin^2 20^\circ + \sin^2 40^\circ + \sin^2 80^\circ = \frac{3}{2}$

解  $\cos^2\alpha + \cos^2(\alpha + 120^\circ) + \cos^2(\alpha - 120^\circ)$   
 $= \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} + \frac{1 + \cos(2\alpha + 240^\circ)}{2} + \frac{1 + \cos(2\alpha - 240^\circ)}{2}$   
 $= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \{ \cos 2\alpha + \cos(2\alpha - 120^\circ) + \cos(2\alpha + 120^\circ) \} = \frac{3}{2}$

②に  $\alpha = 20^\circ, 10^\circ$  を代入すれば (2), (3) が得られる。

問題3 次の等式を証明せよ。

- (1)  $\cos^3\alpha + \cos^3(\alpha + 120^\circ) + \cos^3(\alpha - 120^\circ) = \frac{3}{4}\cos 3\alpha$  …… ③  
 (2)  $\cos^3 20^\circ - \cos^3 40^\circ - \cos^3 80^\circ = \frac{3}{8}$       (3)  $\sin^3 20^\circ + \sin^3 40^\circ - \sin^3 80^\circ = -\frac{3\sqrt{3}}{8}$

解  $\cos^3\theta = \frac{\cos 3\theta + 3\cos\theta}{4}$  を用いて  
 $\cos^3\alpha + \cos^3(\alpha + 120^\circ) + \cos^3(\alpha - 120^\circ)$   
 $= \frac{1}{4} \{ \cos 3\alpha + \cos(3\alpha + 360^\circ) + \cos(3\alpha - 360^\circ) \} + \frac{3}{4} \{ \cos\alpha + \cos(\alpha + 120^\circ) + \cos(\alpha - 120^\circ) \}$   
 $= \frac{3}{4}\cos 3\alpha$

③において、 $\alpha = 20^\circ, 10^\circ$  とおくと

$$\cos^3 20^\circ + \cos^3 140^\circ + \cos^3(-100^\circ) = \frac{3}{4}\cos 60^\circ \quad \text{より} \quad \cos^3 20^\circ - \cos^3 40^\circ - \cos^3 80^\circ = \frac{3}{8}$$

$$\cos^3 10^\circ - \cos^3 50^\circ - \cos^3 70^\circ = \frac{3}{4}\cos 30^\circ \quad \text{より} \quad \sin^3 80^\circ - \sin^3 40^\circ - \sin^3 20^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

問題4  $a + b + c = 0$  のとき  $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$  が成り立つことを利用して

$$\cos\alpha \cos(\alpha + 120^\circ) \cos(\alpha - 120^\circ) = \frac{1}{4}\cos 3\alpha \quad \dots\dots \text{④}$$

を導け。また、次の等式を証明せよ。

$$\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{8} \quad \dots\dots \text{⑤}, \quad \tan 20^\circ \tan 40^\circ \tan 80^\circ = \sqrt{3}$$

解 ①より  $\cos\alpha + \cos(\alpha + 120^\circ) + \cos(\alpha - 120^\circ) = 0$  であるから  
 $\cos^3\alpha + \cos^3(\alpha + 120^\circ) + \cos^3(\alpha - 120^\circ) = 3\cos\alpha \cos(\alpha + 120^\circ) \cos(\alpha - 120^\circ)$

$$\text{③より} \quad \cos\alpha \cos(\alpha + 120^\circ) \cos(\alpha - 120^\circ) = \frac{1}{4}\cos 3\alpha$$

④において、 $\alpha = 20^\circ, 10^\circ$  とおくと

$$\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{8}, \quad \sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8}$$

辺々割り算して  $\tan 20^\circ \tan 40^\circ \tan 80^\circ = \sqrt{3}$

別解 ⑤については、 $\sin\theta \cos\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta$  を繰り返して用いると

$$\sin 20^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{8}\sin 160^\circ$$

$\sin 20^\circ = \sin 160^\circ$  で両辺を割ると ⑤ が得られる。