

## 2倍角の公式の図形的証明

図1において、線分 AB は単位円 O の直径、周上の点 C は

$$\angle CAB = \theta \quad (0^\circ < \theta < 45^\circ), \quad \angle COB = 2\theta$$

となるようにとる。また、C から AB に垂線 CD をひくと

$$\angle BCD = \theta$$

となり、直角三角形 ABC において

$$AC = 2 \cos \theta, \quad CB = 2 \sin \theta$$

(1)  $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$

直角三角形 COD において  $CD = \sin 2\theta$

一方、直角三角形 CBD において  $CD = CB \sin \theta = 2 \sin \theta \cos \theta$

(2)  $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$

図2において、L, M, N をそれぞれ AC, CB, DB の中点とすると、四角形 LOMC は長方形、また  $MN \parallel CD$  となる。

直角三角形 COD において  $OD = \cos 2\theta$

一方  $OM = LC = \cos \theta$  より  $ON = OM \cos \theta = \cos^2 \theta$

また  $MB = \sin \theta$  より  $DN = NB = MB \sin \theta = \sin^2 \theta$  ゆえに

$$OD = ON - DN = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

(3)  $\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$

図3において、 $\triangle OAB$  は

$$OA = 1, \quad \angle OAB = 90^\circ, \quad \angle BOA = 2\theta$$

の直角三角形である。 $\angle BOA$  の二等分線と BA の交点を C とし、C を通り OC に垂直な直線と OA の

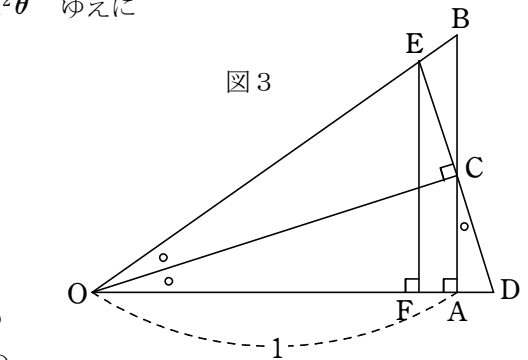
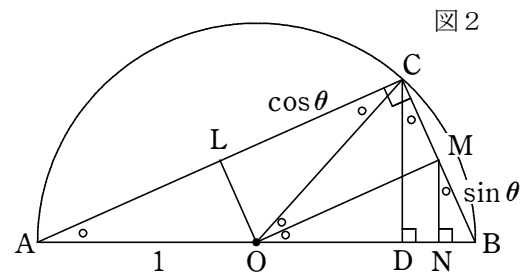
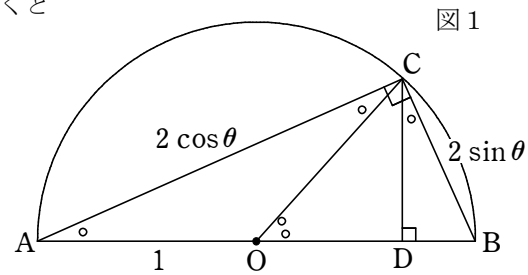
延長および OB との交点をそれぞれ D, E とする。また E から OA に垂線 EF をひく。

直角三角形 EFD において C は斜辺 ED の中点だから

$$EF = 2 CA = 2 \tan \theta$$

一方  $AD = AF = CA \tan \theta = \tan^2 \theta$  また  $OF = OA - AF = 1 - \tan^2 \theta$

したがって  $OF \tan 2\theta = EF$  より  $\tan 2\theta = \frac{EF}{OF} = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$



## 3倍角の公式の図形的証明

下図において、線分 AB は単位円 O の直径、周上の点 C, D, E は

$$\angle CAB = \angle DAB = \theta \quad (0^\circ < \theta < 30^\circ), \quad OE \parallel AD$$

となるようにとる。CD と AB の交点を F, AD の中点を M とする。C から AD に垂線をひき、OB, OE, AD との交点をそれぞれ G, H, J とする。

$$\angle COB = 2\theta, \quad \angle GCF = \angle GOH = \theta, \quad \angle COH = 3\theta$$

直角三角形 ABC, CBF において

$$AC = 2 \cos \theta, \quad CB = CG = 2 \sin \theta$$

$$BF = GF = 2 \sin^2 \theta$$

直角三角形 COH において

$$CH = \sin 3\theta, \quad OH = \cos 3\theta$$

(1)  $\sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$

$$CH = CG + GH$$

$$OG = OB - 2 BF = 1 - 4 \sin^2 \theta$$

$\triangle OGH \sim \triangle CGF$  であり、相似比は  $OG : CG = (1 - 4 \sin^2 \theta) : 2 \sin \theta$  であるから

$$GH = GF \times \frac{1 - 4 \sin^2 \theta}{2 \sin \theta} = \sin \theta (1 - 4 \sin^2 \theta)$$

ゆえに  $CH = 2 \sin \theta + \sin \theta (1 - 4 \sin^2 \theta) = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$

(2)  $\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$

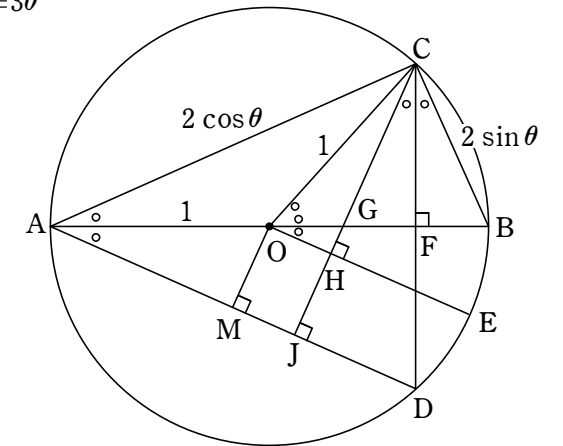
$$OH = MJ = AJ - AM$$

$$OF = AF - AO = AC \cos \theta - AO = 2 \cos^2 \theta - 1$$

$\triangle CAJ \sim \triangle COF$  であり、相似比は  $CA : CO = 2 \cos \theta : 1$  であるから

$$AJ = OF \times 2 \cos \theta = 2 \cos \theta (2 \cos^2 \theta - 1)$$

ゆえに  $OH = 2 \cos \theta (2 \cos^2 \theta - 1) - \cos \theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$



### 余弦の3倍角公式の図形的証明

AB=ACの二等辺三角形ABCにおいて、 $\angle B = \angle C = \theta$  ( $0^\circ < \theta < 30^\circ$ )とする。辺BC上に点Dを $\angle CAD = \theta$ となるようにとり、また、Dから直線BAに垂線をひき交点をEとする。

DA=DC=1とすると、直角三角形DAEにおいて $\angle DAE = 3\theta$ であるから、

$$AE = DA \cos 3\theta = \cos 3\theta \quad \dots\dots ①$$

一方

$$AB = AC = 2 \cos \theta, \quad BC = 2AB \cos \theta = 4 \cos^2 \theta \quad \text{より}$$

$$BD = BC - DC = 4 \cos^2 \theta - 1$$

直角三角形DBEにおいて

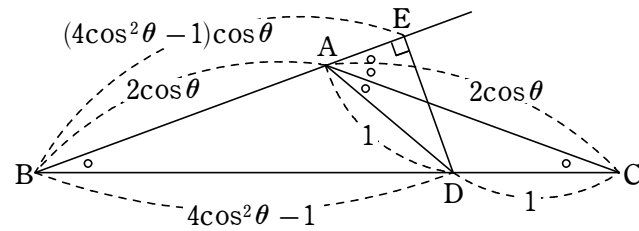
$$BE = BD \cos \theta = (4 \cos^2 \theta - 1) \cos \theta$$

ゆえに

$$\begin{aligned} AE &= BE - BA \\ &= (4 \cos^2 \theta - 1) \cos \theta - 2 \cos \theta \\ &= 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \quad \dots\dots ② \end{aligned}$$

①, ②より

$$\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$$



### 三角関数の等式の図形的証明

(1)  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$  のとき  $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$

半径1の円Oに内接する鋭角三角形ABCを考える。

$$\angle OBC = \angle OCB = \frac{\alpha}{2}, \quad \angle OCA = \angle OAC = \frac{\beta}{2}, \quad \angle OAB = \angle OBA = \frac{\gamma}{2}$$

とおくと  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$  が成り立つ。また

$$\angle BOC = 180^\circ - \alpha \quad \text{より} \quad \sin \angle BOC = \sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\sin \angle COA = \sin(180^\circ - \beta) = \sin \beta, \quad \sin \angle AOB = \sin(180^\circ - \gamma) = \sin \gamma$$

ゆえに

$$\begin{aligned} \Delta BOC + \Delta COA + \Delta AOB \\ &= \frac{1}{2} \sin \angle BOC + \frac{1}{2} \sin \angle COA + \frac{1}{2} \sin \angle AOB \\ &= \frac{1}{2} (\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma) \end{aligned}$$

また、 $\angle BCA = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$  より  $\sin \angle BCA = \sin\left(90^\circ - \frac{\gamma}{2}\right) = \cos \frac{\gamma}{2}$

$$\begin{aligned} \Delta ABC &= \frac{1}{2} BC \cdot CA \sin \angle BCA = \frac{1}{2} \cdot 2 \cos \frac{\alpha}{2} \cdot 2 \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} \end{aligned}$$

$\Delta BOC + \Delta COA + \Delta AOB = \Delta ABC$  であるから

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$$

