係数分離法から組立除法へ

整式の乗･除法において，整数と同じように縦書きの計算ができる。このとき次の２点に注意する。

① 整式は降べきの順に整理する

② 同じ次数の項を縦にそろえる (項がないときは空けておく)

下の左側の計算に慣れたら，右側のように係数だけを取り出して計算すると効率的である。

例1 整式の乗法 $(2x^2-x-3)(x^2-3x+2)$

$$
\begin{array}{rrrrrr}
 & & & 2x^2 & -x & -3 \\
\times) & & & x^2 & -3x & +2 \\ \cline{2-6}
 & & & 4x^2 & -2x & -6 \\
 & & -6x^3 & +3x^2 & +9x & \\
 & 2x^4 & -x^3 & -3x^2 & & \\ \cline{2-6}
 & 2x^4 & -7x^3 & +4x^2 & +7x & -6
\end{array}
\quad \xrightarrow{\text{係数分離法}} \quad
\begin{array}{rrrrrr}
 & & & 2 & -1 & -3 \\
\times) & & & 1 & -3 & 2 \\ \cline{2-6}
 & & & 4 & -2 & -6 \\
 & & -6 & 3 & 9 & \\
 & 2 & -1 & -3 & & \\ \cline{2-6}
 & 2 & -7 & 4 & 7 & -6
\end{array}
$$

例2 整式の除法 $2x^3+4x^2+7$ を $2x^2-3$ で割ったときの商と余り

$$
\begin{array}{rrrrrr}
 & & & & x & +2 \\ \cline{3-6}
2x^2 & -3\,\big) & 2x^3 & +4x^2 & & +7 \\
 & & 2x^3 & & -3x & \\ \cline{3-6}
 & & & 4x^2 & +3x & +7 \\
 & & & 4x^2 & & -6 \\ \cline{4-6}
 & & & & 3x & +13
\end{array}
\quad \xrightarrow{\text{係数分離法}} \quad
\begin{array}{rrrrrrr}
 & & & & & 1 & 2 \\ \cline{4-7}
2 & 0 & -3\,\big) & 2 & 4 & 0 & 7 \\
 & & & 2 & 0 & -3 & \\ \cline{4-7}
 & & & & 4 & 3 & 7 \\
 & & & & 4 & 0 & -6 \\ \cline{5-7}
 & & & & & 3 & 13
\end{array}
$$

商は $x+2$，余りは $3x+13$

例3 １次式での除法 $3x^3+2x^2-3x+16$ を $x+2$ で割ったときの商と余り

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & 3x^2 & -4x & + & 5 \\ \cline{2-5}
x+2\,\big) & 3x^3 & +2x^2 & -3x & +16 \\
 & 3x^3 & +6x^2 & & \\ \cline{2-5}
 & & -4x^2 & -3x & \\
 & & -4x^2 & -8x & \\ \cline{3-5}
 & & & 5x & +16 \\
 & & & 5x & +10 \\ \cline{4-5}
 & & & & 6
\end{array}
\quad \xrightarrow{\text{係数分離法}} \quad
\begin{array}{rrrrrr}
 & & & 3 & -4 & 5 \\ \cline{3-6}
1 & \boxed{2}\,\big) & \boxed{3} & \boxed{2} & \boxed{-3} & \boxed{16} \\
 & & 3 & \boxed{6} & & \\ \cline{3-6}
 & & & \boxed{-4} & -3 & \\
 & & & -4 & \boxed{-8} & \\ \cline{4-6}
 & & & & \boxed{5} & 16 \\
 & & & & 5 & \boxed{10} \\ \cline{5-6}
 & & & & & \boxed{6}
\end{array}
$$

商は $3x^2-4x+5$，余りは 6

係数分離法において，同じ数を繰り返し書かず，□ の部分のみを書くようにするとさらに効率的である。(組立除法)

$$
\begin{array}{r|rrrr}
2 & 3 & 2 & -3 & 16 \\ \cline{1-1}
 & & 6 & -8 & 10 \\ \hline
 & 3 & -4 & 5 & \multicolumn{1}{|r}{6} \\ \cline{5-5}
\end{array}
\quad \xrightarrow{\text{2 を −2 として}} \quad
\begin{array}{r|rrrr}
-2 & 3 & 2 & -3 & 16 \\ \cline{1-1}
 & & -6 & 8 & -10 \\ \hline
 & 3 & -4 & 5 & \multicolumn{1}{|r}{6} \\ \cline{5-5}
\end{array}
$$

引き算を足し算にする

$2-2\cdot 3 \to -4$ $\qquad$ $2+(-2)\cdot 3 \to -4$

$-3-2\cdot(-4) \to 5$ $\qquad$ $-3+(-2)\cdot(-4) \to 5$

$16-2\cdot 5 \to 6$ $\qquad$ $16+(-2)\cdot 5 \to 6$

x の整式 ax^3+bx^2+cx+d を１次式 $x-\alpha$ で割ったときの商を kx^2+lx+m，余りを r とすると

$$
\begin{aligned}
ax^3+bx^2+cx+d &= (x-\alpha)(kx^2+lx+m)+r \\
&= k+(-\alpha k+l)x^2+(-\alpha l+m)x+(-\alpha m+r)
\end{aligned}
$$

両辺の係数を比較すると

$a=k$，$b=-\alpha k+l$，$c=-\alpha l+m$，$d=-\alpha m+r$

これから，a，b，c，d と α から k，l，m，r を得る手続きは

$k=a$，$l=b+\alpha k$，$m=c+\alpha l$，$r=d+\alpha m$

$$
\begin{array}{r|rrrr}
\alpha & a & b & c & d \\ \cline{1-1}
 & & \alpha k & \alpha l & \alpha m \\ \hline
 & k & l & m & \multicolumn{1}{|r}{r} \\ \cline{5-5}
\end{array}
$$