

いろいろな平均

■ 2数の平均

$$a > 0, b > 0 \text{ のとき } \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b} \quad (\text{等号は } a=b \text{ のとき成立})$$

2つの正の数 a, b について

$$\text{相加平均: } A = \frac{a+b}{2} \quad \text{相乗平均: } G = \sqrt{ab} \quad \text{調和平均 } H = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

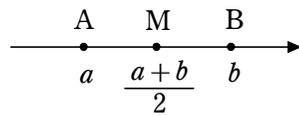
といい $A \geq G \geq H$ が成り立つ。

$$\text{証明 } \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{(\sqrt{a})^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + (\sqrt{b})^2}{2} = \frac{1}{2}(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$$

$$\frac{1}{a} = a', \frac{1}{b} = b' \text{ とおくと } \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b} \Leftrightarrow \frac{a+b}{2ab} \geq \sqrt{\frac{1}{a'b'}} \Leftrightarrow \frac{a'+b'}{2} \geq \sqrt{a'b'} \quad (\text{証明終})$$

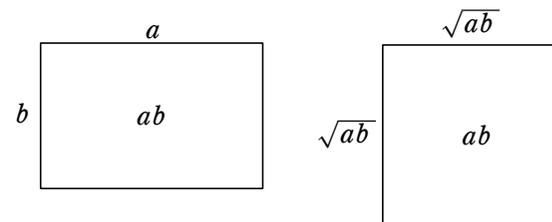
例 <相加平均>

線分 AB の中点 M の座標



<相乗平均>

長方形と面積の等しい正方形の1辺



<調和平均>

行きの速さが v_1 , 帰りの速さが v_2 のとき, 平均の速さを v とする。

道のりを d とすると, かかった時間について

$$\frac{2d}{v} = \frac{d}{v_1} + \frac{d}{v_2} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{v} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} \right)$$

■ 3数の相加平均と相乗平均

$$a > 0, b > 0, c > 0 \text{ のとき } \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \quad (\text{等号は } a=b=c \text{ のとき成立})$$

証明 $\sqrt[3]{a} = a', \sqrt[3]{b} = b', \sqrt[3]{c} = c'$ とおくと

$$a+b+c - 3\sqrt[3]{abc} = a'^3 + b'^3 + c'^3 - 3a'b'c'$$

$$\geq \frac{1}{2}(a'+b'+c')\{(b'-c')^2 + (c'-a')^2 + (a'-b')^2\} \geq 0 \quad (\text{証明終})$$

4つの正の数 a, b, c, d についても

$$\frac{a+b+c+d}{4} = \frac{1}{2} \left(\frac{a+b}{2} + \frac{c+d}{2} \right) \geq \frac{1}{2}(\sqrt{ab} + \sqrt{cd}) \geq \sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{cd}} = \sqrt[4]{abcd}$$

が成り立つ。

■ 一般化された平均

x_1, x_2, \dots, x_n の n 個の値に対し, ある関数 $f(x)$ をとり

$$f(M) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) \quad \text{あるいは} \quad M = f^{-1} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) \right)$$

となる M を一般化された平均と考えることができる。

例 $f(x) = x$ のとき $M = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$: 相加平均

$f(x) = \log x$ のとき $\log M = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log x_k$ より $M = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$: 相乗平均

$f(x) = \frac{1}{x}$ のとき $\frac{1}{M} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k}$: 調和平均

n 個の正の数について (相加平均) \geq (相乗平均) \geq (調和平均) が成り立つ。