

3次関数のグラフ 基本形と一般形

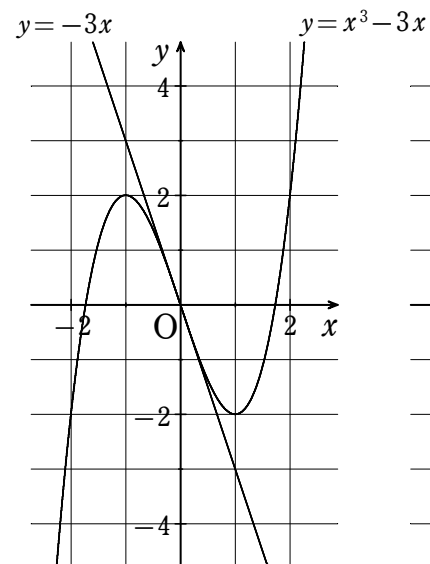
■ 典型的な例

(1) $f(x) = x^3 - 3x$

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$= 3(x+1)(x-1)$$

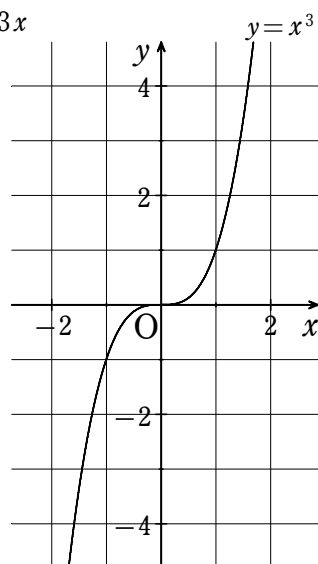
x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	極大 2	↘	極小 -2	↗



(2) $f(x) = x^3$

$$f'(x) = 3x^2$$

x	...	0	...
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	↗	0	↗

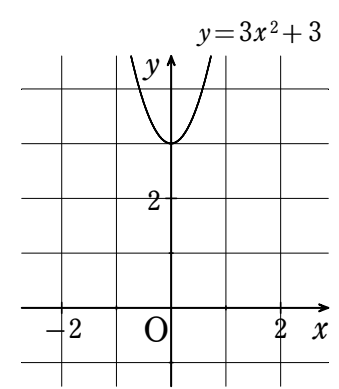
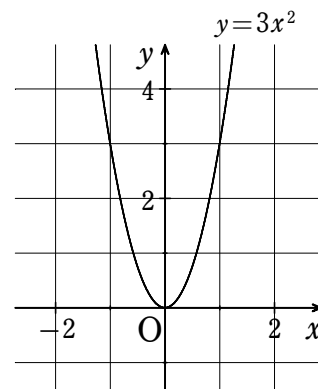
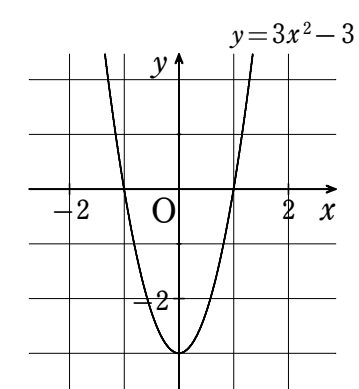
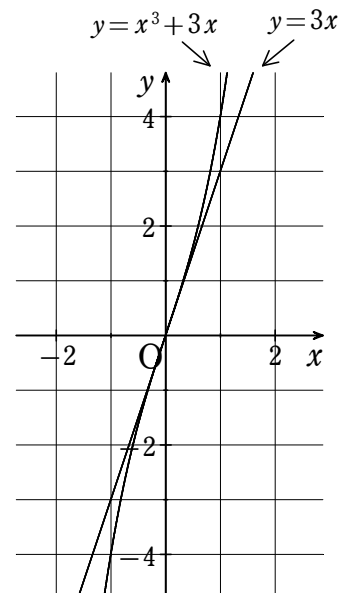


(3) $f(x) = x^3 + 3x$

$$f'(x) = 3x^2 + 3$$

つねに $f'(x) > 0$

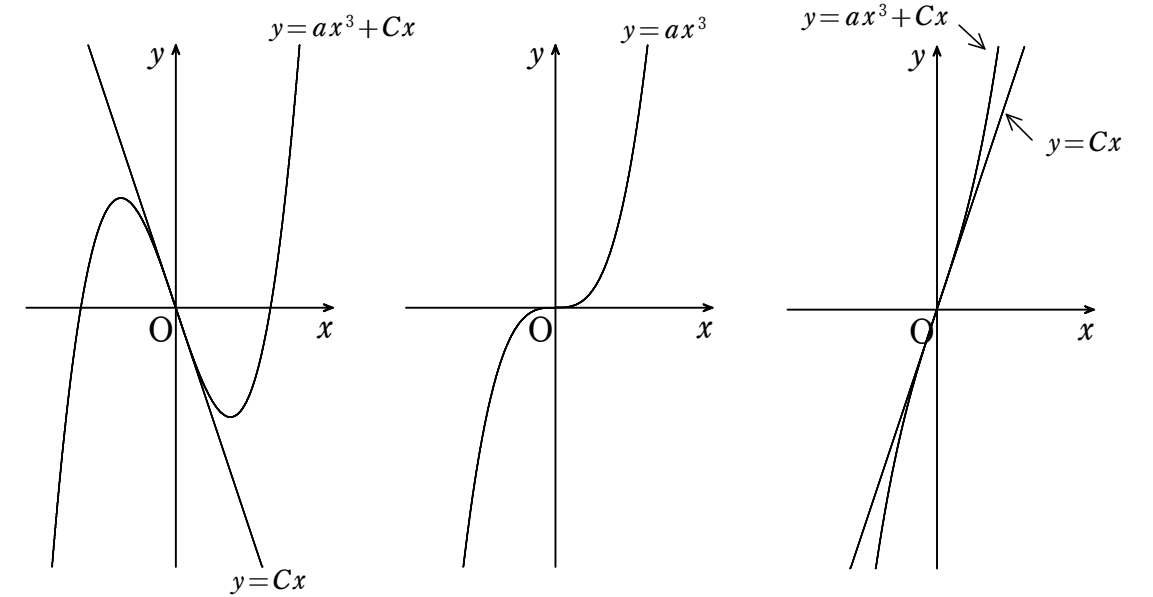
$f'(x)$ は最小値
 $f'(0) = 3$ をとる



■ 基本形 $y = ax^3 + Cx$ ($a > 0$)

すべての3次関数のグラフはこの基本形を平行移動した形になる。

- (1) $C < 0$ のとき (極値をもつ) (2) $C = 0$ のとき (単調増加) (3) $C > 0$ のとき (単調増加)



■ 一般形 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ← 基本形を平行移動した形になる

$X = x + \frac{b}{3a}$ において X^2 の項を消去する。(立方完成)

$$\begin{aligned} y &= ax^3 + bx^2 + cx + d = a\left(X - \frac{b}{3a}\right)^3 + b\left(X - \frac{b}{3a}\right)^2 + c\left(X - \frac{b}{3a}\right) + d \\ &= aX^3 + \left(c - \frac{b^2}{3a}\right)X + d - \frac{bc}{3a} + \frac{b^3}{27a^2} \end{aligned}$$

ここで $X = x + \frac{b}{3a} = x - p$, $c - \frac{b^2}{3a} = C$, $d - \frac{bc}{3a} + \frac{2b^3}{27a^2} = q$ とおくと

$$y = a(x - p)^3 + C(x - p) + q \quad \text{すなわち} \quad y - q = a(x - p)^3 + C(x - p)$$

$y = ax^3 + Cx$ のグラフ

↓ x 方向へ p , y 方向へ q だけ平行移動

$$y - q = a(x - p)^3 + C(x - p) \text{ のグラフ}$$