

3次方程式の解の公式

■ 2次の項を消去する

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (a, b, c, d \text{ は実数, } a \neq 0) \quad \dots\dots ①$$

両辺を a で割って $x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0$

第1の変換: $X = x + \frac{b}{3a}$ において, 2次の項を消去する, いわゆる「立方完成」を行う。

$x = X - \frac{b}{3a}$ として上の式に代入して整理すると

$$X^3 + \left\{ -\frac{1}{3} \left(\frac{b}{a} \right)^2 + \frac{c}{a} \right\} X + \frac{2}{27} \left(\frac{b}{a} \right)^3 - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a} = 0$$

ここで $3p = -\frac{1}{3} \left(\frac{b}{a} \right)^2 + \frac{c}{a}$, $2q = \frac{2}{27} \left(\frac{b}{a} \right)^3 - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a}$ とおくと①は②に帰着する。

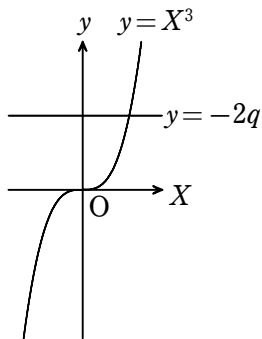
$$X^3 + 3pX + 2q = 0 \quad \dots\dots ②$$

■ 実数解の個数

②の実数解の個数は $y = X^3 + 3pX$ と $y = -2q$ のグラフの共有点の個数に一致する。

以下で, ω, ω^2 は1の虚数立方根(*)である。

$p=0$ のとき

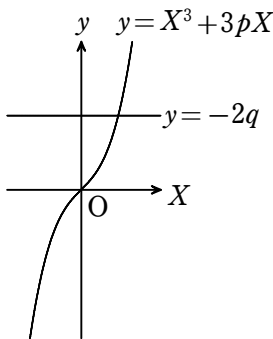


(1) $q=0$ のとき
 $X=0$ (3重解)

(2) $q \neq 0$ のとき
1つの実数解と
2つの虚数解

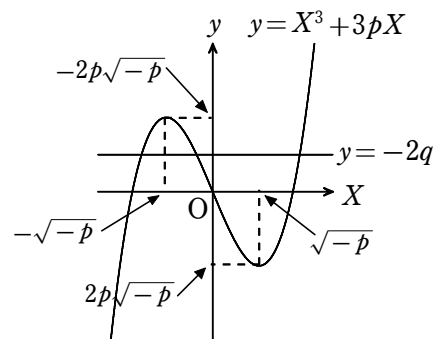
$$X = \sqrt[3]{-2q}, \sqrt[3]{-2q}\omega, \sqrt[3]{-2q}\omega^2$$

$p>0$ のとき



(3) 1つの実数解と
2つの虚数解

$p<0$ のとき



(4) $|-2q| > |-2p\sqrt{-p}|$
すなわち $q^2 > -p^3$ のとき
1つの実数解と2つの虚数解

(5) $q^2 = -p^3$ のとき
3つの実数解 (2重解を含む)

(6) $q^2 < -p^3$ のとき
3つの実数解

■ 2次方程式に帰着させる

②において $p=0$ または $q=0$ のときは, 解は容易に求まるので, 以下では $p \neq 0, q \neq 0$ とする。

第2の変換: $X = t - \frac{p}{t}$ において②に代入すると

$$t^3 - \frac{p^3}{t^3} + 2q = 0 \quad \text{より} \quad (t^3)^2 + 2qt^3 - p^3 = 0 \quad \dots\dots ③$$

となり, t^3 の2次方程式に帰着される。 t^3 について解くと

$$(t^3 + q)^2 = q^2 + p^3 \quad \text{から} \quad t^3 = -q \pm \sqrt{q^2 + p^3} \quad \dots\dots ④$$

■ $q^2 + p^3 > 0$ の場合, (3), (4) に対応して1つの実数解と2つの虚数解 (互いに共役) がある

$$A = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}}, \quad B = \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^3}}$$

とおくと, A, B はともに実数で $AB = -p$ であるから

$$t^3 = -q + \sqrt{q^2 + p^3} \quad \text{の解} \quad t = A, A\omega, A\omega^2$$

$$t^3 = -q - \sqrt{q^2 + p^3} \quad \text{の解} \quad t = B, B\omega, B\omega^2$$

のいずれの組を用いても②の解は

$$X = A + B, A\omega + B\omega^2, A\omega^2 + B\omega (= A\bar{\omega} + B\bar{\omega}^2)$$

となる。

■ $q^2 + p^3 < 0$ の場合, (6) に対応して異なる3つの実数解がある

$$t^3 = -q + \sqrt{-q^2 - p^3}i \quad \dots\dots ⑤ \quad t^3 = -q - \sqrt{-q^2 - p^3}i \quad \dots\dots ⑤'$$

⑤の解の1つを α とすると $\bar{\alpha}$ は⑤'の解であり, $\alpha\bar{\alpha} = -p$ である。

$$⑤ \text{ の3つの解は } t = \alpha, \alpha\omega, \alpha\omega^2$$

$$⑤' \text{ の3つの解は } t = \bar{\alpha}, \bar{\alpha}\omega (= \overline{\alpha\omega^2}), \bar{\alpha}\omega^2 (= \overline{\alpha\omega})$$

いずれの組を用いても②の解は

$$X = \alpha + \bar{\alpha}, \alpha\omega + \bar{\alpha}\omega, \alpha\omega^2 + \bar{\alpha}\omega^2$$

となる。したがって, 問題は虚数の立方根の1つ α を求めることに帰着される。ただし, 一般的に α を p, q と $\sqrt{\quad}, \sqrt[3]{\quad}$ などを用いて表すことはできないようである。(**)

補足(*) 1の虚数立方根

1の立方根すなわち $x^3 = 1$ の解は $x = 1, \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ である。虚数の解のうち的一方を ω で表す

と他方は ω^2 となる。 ω は $\omega^2 = \frac{1}{\omega} = \bar{\omega}, \omega^2 + \omega + 1 = 0$ を満たす。

■ 例 $x^3 - 3x^2 + 9x - 5 = 0$ …… ①

$x = X + 1$ とおくと、①は

$$(X+1)^3 - 3(X+1)^2 + 9(X+1) - 5 = 0 \quad \text{より} \quad X^3 + 6X + 2 = 0 \quad \text{…… ②}$$

$X = t - \frac{2}{t}$ とおくと

$$\left(t - \frac{2}{t}\right)^3 + 6\left(t - \frac{2}{t}\right) + 2 = 0 \quad \text{より} \quad t^3 - \frac{8}{t^3} + 2 = 0$$

$$(t^3)^2 + 2t^3 - 8 = 0 \quad \text{…… ③} \quad \text{よって} \quad t^3 = 2, -4 \quad \text{…… ④}$$

実数解は $t = \sqrt[3]{2}, -\sqrt[3]{4}$

②の3つの解は

$$X = \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2} \cdot \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} - \sqrt[3]{4} \cdot \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}, \sqrt[3]{2} \cdot \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} - \sqrt[3]{4} \cdot \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$$

①の3つの解は $x = X + 1$ より

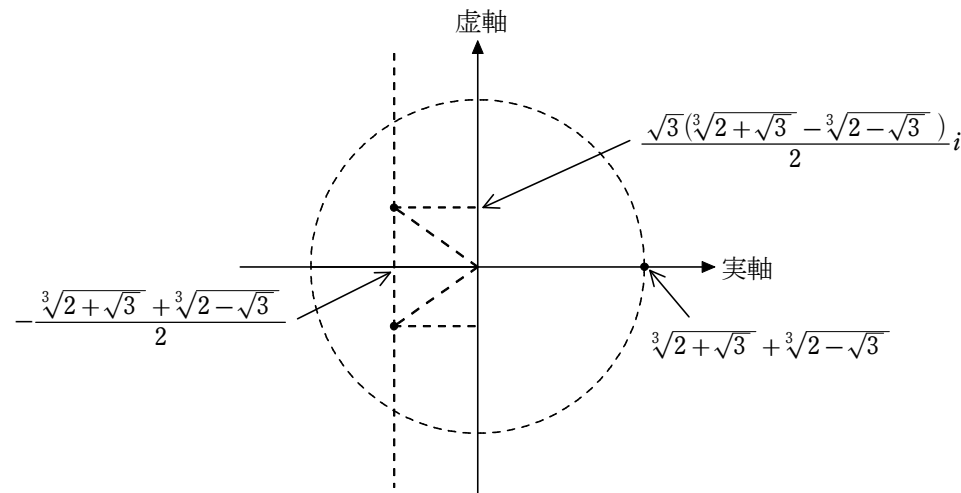
$$x = 1 + \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}, \frac{2 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}}{2} \pm \frac{\sqrt{3}(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})}{2}i$$

■ 例 $x^3 - 3x - 4 = 0$

$x = t + \frac{1}{t}$ とおくと $(t^3)^2 - 4t^3 + 1 = 0$ よって $t^3 = 2 \pm \sqrt{3}$

実数解は $t = \sqrt[3]{2 + \sqrt{3}}, \sqrt[3]{2 - \sqrt{3}}$

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{3}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{3}}, -\frac{\sqrt[3]{2 + \sqrt{3}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{3}}}{2} \pm \frac{\sqrt{3}(\sqrt[3]{2 + \sqrt{3}} - \sqrt[3]{2 - \sqrt{3}})}{2}i$$



補足(**) 虚数の立方根を一般的には求められないことについて

虚数 $a + bi$ (a, b は 0 でない実数) の立方根を z とすると

$$z^3 = a + bi \quad \text{…… ①}$$

ここで $z = x + yi$ (x, y は実数) とすると

$$(x + yi)^3 = a + bi \quad \text{より} \quad (x^3 - 3xy^2) + (3x^2y - y^3)i = a + bi$$

実部と虚部を比較して

$$x^3 - 3xy^2 = a, \quad 3x^2y - y^3 = b \quad \text{…… ②}$$

これを連立して解くことを考える。

仮に $x = 0$ ならば $a = 0$, $y = 0$ ならば $b = 0$ であるから $x \neq 0$, $y \neq 0$ である。

$$s = \frac{y}{x}, \quad c = \frac{b}{a}$$

とおくと、②は

$$x^3(1 - 3s^2) = a, \quad x^3(3t - s^3) = ac \quad \text{…… ②'}$$

辺々割り算をして

$$\frac{3s - s^3}{1 - 3s^2} = c \quad \text{より} \quad s^3 - 3cs^2 - 3s + c = 0 \quad \text{…… ③}$$

したがって、虚数の立方根を求めることは、また s の 3 次方程式 ③ を解くことに帰着される。

もし実数解 s_0 が求められれば、②' より $x_0 = \sqrt[3]{\frac{a}{1 - 3s_0^2}}$ として $x_0(1 + s_0 i)$ が求める立方根の 1 つである。

$S = s - c$ とおくと ③ は

$$S^3 - 3(c^2 + 1)S - 2c(c^2 + 1) = 0 \quad \text{…… ③'}$$

左辺を $f(S)$ とおくと

$$\text{極大値} \quad f(-\sqrt{c^2 + 1}) = 2(c^2 + 1)(\sqrt{c^2 + 1} - c) > 0$$

$$\text{極小値} \quad f(\sqrt{c^2 + 1}) = -2(c^2 + 1)(\sqrt{c^2 + 1} + c) < 0$$

であるから、③' は異なる 3 つの実数解をもつ。結局、(6) と同じ状況になってしまう。

様々な教科書や一般啓蒙書には 3 次方程式の解の公式が説明されている。ところが、ごく簡単な 3 次方程式、たとえば $x^3 - 3x - 1 = 0$ でも、解の公式で解くことができない。(解が実数と $\sqrt{\quad}$, $\sqrt[3]{\quad}$ などを用いて表せない) 上の考察では、3 つの実数解をもつ場合、解の公式は使えないという結論になる。もしそうであるならば、教科書には解の公式が限定的であることを明記してもらえたら、無駄な計算をしなくてすむことと思われる。