

虚数の平方根

■ 正の数 a の平方根, すなわち $x^2=a$ の解は $x=\pm\sqrt{a}$ (異なる2つの実数, 正と負)

例 3の平方根は $\pm\sqrt{3}$

■ 負の数 $-a$ の平方根, すなわち $x^2=-a$ の解は $x=\pm\sqrt{-a}$ (異なる2つの純虚数, 互いに共役)

$\sqrt{-a}$ を $\sqrt{-a}$ と表す, $-\sqrt{-a}$ は $-\sqrt{-a}$ ← $\sqrt{\text{負の数}}$ の約束(根号の規約)

例 -3 の平方根は $\pm\sqrt{-3}=\pm\sqrt{3}i$

$a>0$ のとき, $-a$ の平方根は $\pm\sqrt{-a}=\pm\sqrt{a}i$ (複号同順)

■ \sqrt{i} とは

\sqrt{i} を i の平方根, すなわち $x^2=i$ の解の1つ考えることができる。ただ, それぞれがどんな複素数かはよくわからないので, ふつう $\sqrt{\text{虚数}}$ は定義しない。

実際に, i の平方根を求めるには次のようにすればよい。

$z=x+yi$ (x, y は未知の実数) として, $z^2=i$ を満たす x, y を求める。

$$(x+yi)^2=i \text{ より } (x^2-y^2)+2xyi=i$$

両辺の実部, 虚部を比較して

$$x^2-y^2=0 \quad \dots\text{①} \quad 2xy=1 \quad \dots\text{②}$$

これを連立して解けばよい。①より $(x-y)(x+y)=0$ だから $x=y$ または $x=-y$

$x=-y$ のとき, ②より $-2y^2=1$, y は実数だから, これを満たす y は存在しない。

$x=y$ のとき, ②より $2y^2=1$ よって $y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ (複号同順)

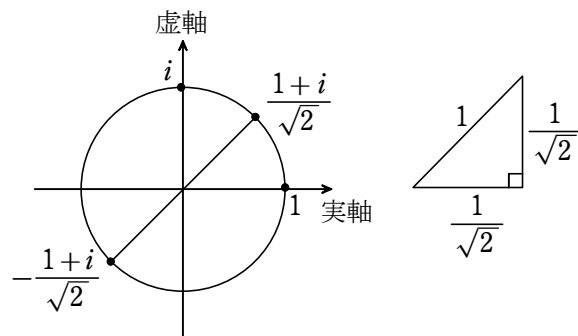
したがって $z=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$, $-\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ この2つの複素数が i の平方根である。

これらを平方すると

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1+2i+i^2}{2}=i,$$

$$\left(-\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2=i$$

となり, i の平方根であることが確かめられる。



■ 虚数 $a+bi$ ($b\neq 0$) の平方根

$z=x+yi$ において $z^2=a+bi$ を満たす実数 x, y を求める。

$$x^2-y^2=a \quad \dots\text{①} \quad 2xy=b \quad \dots\text{②}$$

②より $x\neq 0, y\neq 0$, y を消去すると

$$x^2-\frac{b^2}{4x^2}=a \text{ より } 4x^4-4ax^2-b^2=0$$

$$(2x^2-a)^2=a^2+b^2 \text{ ゆえに } x^2=\frac{a\pm\sqrt{a^2+b^2}}{2}$$

$a-\sqrt{a^2+b^2}<0$, $a+\sqrt{a^2+b^2}>0$ であるから $x^2=\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}$, ゆえに

$$x=\pm\frac{\sqrt{a+\sqrt{a^2+b^2}}}{\sqrt{2}}$$

$$y=\frac{b}{2x}=\pm\frac{b}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a+\sqrt{a^2+b^2}}}=\pm\frac{b}{\sqrt{b^2}}\cdot\frac{\sqrt{-a+\sqrt{a^2+b^2}}}{\sqrt{2}}$$

したがって

$$b>0 \text{ のとき } z=\pm\frac{\sqrt{a+\sqrt{a^2+b^2}}+\sqrt{-a+\sqrt{a^2+b^2}}i}{\sqrt{2}}$$

$$b<0 \text{ のとき } z=\pm\frac{\sqrt{a+\sqrt{a^2+b^2}}-\sqrt{-a+\sqrt{a^2+b^2}}i}{\sqrt{2}}$$