

放物線の接線

放物線と直線 l との交点 A, B の x 座標をそれぞれ $\alpha, \beta (\alpha \neq \beta)$ とするとき、

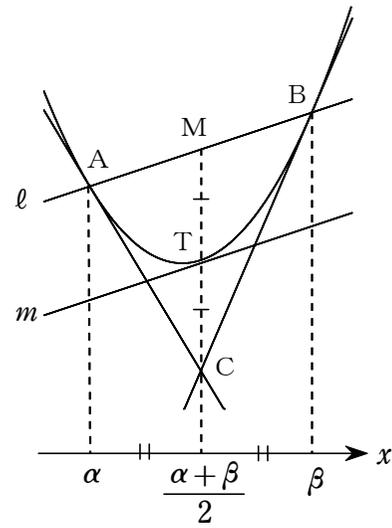
① l に平行な接線 m の接点 T の x 座標は

$$\frac{\alpha + \beta}{2}$$

② A, B における接線の交点 C の x 座標は

$$\frac{\alpha + \beta}{2}$$

③ 線分 AB の中点を M とするとき、T は線分 MC の中点である。



① 放物線の方程式を $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) とする。A, B の座標は

$$A(\alpha, a\alpha^2 + b\alpha + c), \quad B(\beta, a\beta^2 + b\beta + c) \quad (\alpha \neq \beta)$$

であるから、直線 l の傾きは

$$\frac{(a\beta^2 + b\beta + c) - (a\alpha^2 + b\alpha + c)}{\beta - \alpha} = \frac{a(\beta^2 - \alpha^2) + b(\beta - \alpha)}{\beta - \alpha} = a(\alpha + \beta) + b$$

一方、 $y' = 2ax + b$ より、接点 T の x 座標を t とすると、接線 m の傾きは

$$2at + b$$

l と m が平行のとき

$$2at + b = a(\alpha + \beta) + b \quad \text{したがって} \quad t = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

② A における接線の方程式は

$$y - (a\alpha^2 + b\alpha + c) = (2a\alpha + b)(x - \alpha) \quad \text{より}$$

$$y = (2a\alpha + b)x - a\alpha^2 + c$$

同様にして、B における接線の方程式は

$$y = (2a\beta + b)x - a\beta^2 + c$$

これら 2 つの方程式から y を消去すると

$$2a(\beta - \alpha)x = a(\beta^2 - \alpha^2)$$

$a \neq 0, \alpha \neq \beta$ であるから、2 接線の交点 C の x 座標は

$$x = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

③ T の y 座標は

$$a \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right)^2 + b \cdot \frac{\alpha + \beta}{2} + c \quad \dots \text{①}$$

一方、線分 AB の中点 M の y 座標は

$$\frac{(a\alpha^2 + b\alpha + c) + (a\beta^2 + b\beta + c)}{2} = a \cdot \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} + b \cdot \frac{\alpha + \beta}{2} + c$$

C の y 座標は

$$(2a\alpha + b) \cdot \frac{\alpha + \beta}{2} - b\alpha^2 + c = a\alpha\beta + b \cdot \frac{\alpha + \beta}{2} + c$$

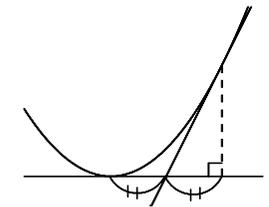
よって、線分 MC の中点の y 座標は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left\{ \left(a \cdot \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} + b \cdot \frac{\alpha + \beta}{2} + c \right) + \left(a\alpha\beta + b \cdot \frac{\alpha + \beta}{2} + c \right) \right\} \\ &= a \cdot \frac{\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2}{4} + b \cdot \frac{\alpha + \beta}{2} + c = a \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right)^2 + b \cdot \frac{\alpha + \beta}{2} + c \end{aligned}$$

これは①に一致する。

② の特別な場合

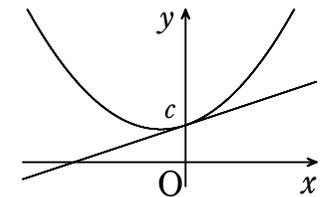
一方が頂点を通る接線



放物線 $y = ax^2 + bx + c$ と y 軸との

交点 $(0, c)$ における接線の方程式は

$$y = bx + c$$



$y' = 2ax + b$ より点 $(0, c)$ における接線の傾きは b であるから、接線の方程式は $y = bx + c$ である。