

放物線と接線の間の面積

図1, 図2 の面積 S は $S = |a| \frac{d^3}{3}$

証明 放物線を $y = ax^2 + bx + c$ とすると

$$y' = 2ax + b$$

より, 放物線上の点 $(\alpha, a\alpha^2 + b\alpha + c)$ における接線の方程式は

$$y - (a\alpha^2 + b\alpha + c) = (2a\alpha + b)(x - \alpha)$$

$$\therefore y = (2a\alpha + b)x - a\alpha^2 + c$$

放物線と接線の関数の差は, 図1の $a > 0$ の場合

$$\begin{aligned} & (ax^2 + bx + c) - \{(2a\alpha + b)x - a\alpha^2 + c\} \\ &= ax^2 - 2a\alpha x + a\alpha^2 = a(x - \alpha)^2 \quad \dots\dots ① \end{aligned}$$

よって $S = \int_{\alpha}^{\alpha+d} a(x - \alpha)^2 dx \quad \dots\dots ②$

$$= a \left[\frac{1}{3}(x - \alpha)^3 \right]_{\alpha}^{\alpha+d} = a \cdot \frac{d^3}{3} \quad \dots\dots ②'$$

図2の $a < 0$ の場合

$$\{(2a\alpha + b)x - a\alpha^2 + c\} - (ax^2 + bx + c) = -a(x - \alpha)^2 \quad \text{から}$$

$$S = - \int_{\alpha}^{\alpha+d} a(x - \alpha)^2 dx \quad \dots\dots ③$$

$$= -a \cdot \frac{d^3}{3} \quad \dots\dots ③' \quad \text{ただし} \quad -a > 0$$

②', ③' とともに $S = |a| \frac{d^3}{3}$ となる。 (証明終)

② から図3の S は図1の S に等しく, ③ から図4の S は図2の S に等しい。

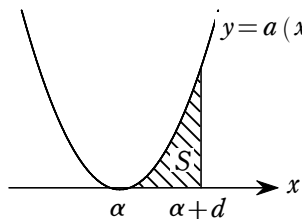


図3

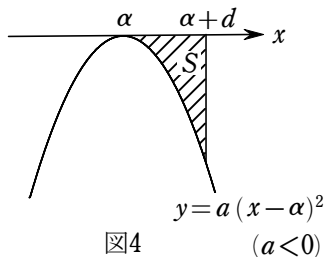


図4

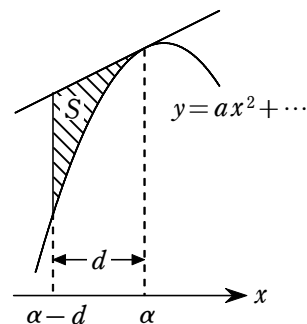


図5

図5 などの場合も同じ式が使える。

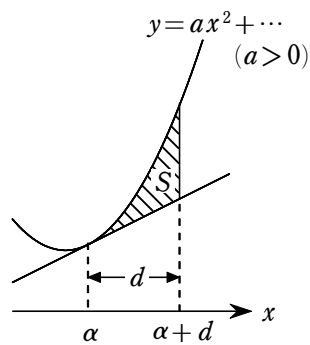


図1

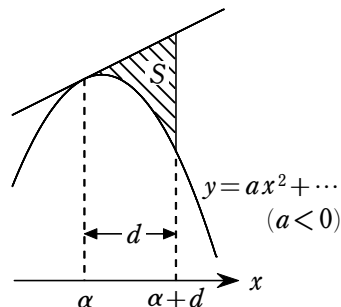


図2