

放物線と直線で囲まれた図形の面積

■  $\frac{1}{6}$  公式の面積への利用

図1, 図2の面積  $S$  は  $S=|a| \cdot \frac{1}{6}d^3=|a| \cdot \frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$

**証明** 放物線と直線の方程式をそれぞれ  $y=ax^2+bx+c$ ,  $y=mx+n$  とすると, 共有点の  $x$  座標  $\alpha, \beta$  ( $\alpha<\beta$ ) は 2次方程式

$$ax^2+bx+c=mx+n \quad \text{すなわち}$$

$$(ax^2+bx+c)-(mx+n)=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

の異なる2つの実数解である。ゆえに①の左辺は

$$(ax^2+bx+c)-(mx+n)=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

と表される。

放物線と直線で囲まれた図形の面積  $S$  は,  $\frac{1}{6}$  公式(後述)

を用いると, 図1の  $a>0$  の場合

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\{(mx+n)-(ax^2+bx+c)\}dx$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}\{-a(x-\alpha)(x-\beta)\}dx=a \cdot \frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

図2の  $a<0$  の場合

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\{(ax^2+bx+c)-(mx+n)\}dx$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}a(x-\alpha)(x-\beta)dx=-a \cdot \frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

いずれの場合も  $S=|a| \cdot \frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$  となる。 (証明終)

②, ③から, 図3, 図4についても同じ式が使えることがわかる。

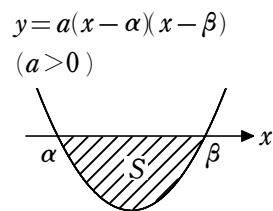


図3

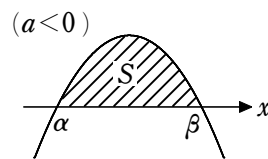


図4

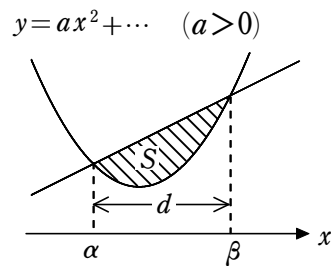


図1

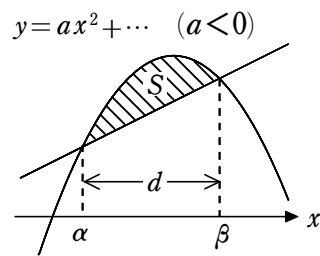
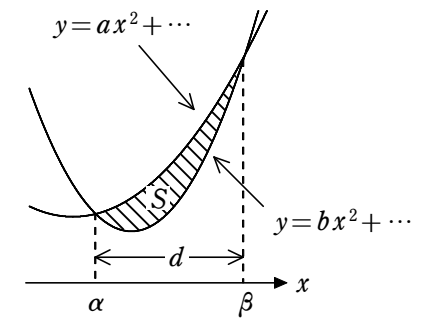


図2

■ 2つの放物線で囲まれた図形の面積

右図の面積  $S$  は

$$S=|a-b| \cdot \frac{1}{6}d^3=|a-b| \cdot \frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$



■ 例題 放物線  $y=x^2$  と直線  $y=2x+1$  とで囲まれた図形の面積を求めよ。

**解** 交点の  $x$  座標は  $x^2=2x+1$  を解いて

$$x^2-2x-1=0 \quad \dots\dots \textcircled{1} \quad \text{よって } x=1\pm\sqrt{2}$$

ここで  $\alpha=1-\sqrt{2}$ ,  $\beta=1+\sqrt{2}$  とおくと

$\alpha, \beta$  は①の2つの解だから

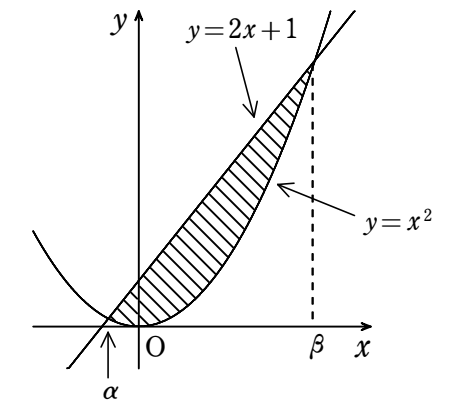
$$x^2-2x-1=(x-\alpha)(x-\beta) \quad \text{また } \beta-\alpha=2\sqrt{2}$$

求める面積  $S$  は図の斜線部分で

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\{(2x+1)-x^2\}dx=\int_{\alpha}^{\beta}\{-x^2+2x+1\}dx$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}\{-(x-\alpha)(x-\beta)\}dx=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

$$=\frac{1}{6}(2\sqrt{2})^3=\frac{8\sqrt{2}}{3}$$



■  $\frac{1}{6}$  公式

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

**証明**  $n$  が正の整数のとき  $\int(x-\alpha)^n dx=\frac{1}{n+1}(x-\alpha)^{n+1}+C$  となることを用いる。

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx=\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)\{(x-\alpha)-(\beta-\alpha)\}dx=\int_{\alpha}^{\beta}\{(x-\alpha)^2-(\beta-\alpha)(x-\alpha)\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3-(\beta-\alpha)\cdot\frac{1}{2}(x-\alpha)^2\right]_{\alpha}^{\beta}=\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3-\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$