

3次方程式の解と係数の関係

3次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ の3つの解を α, β, γ とするとき

$$ax^3+bx^2+cx+d=a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) \quad (\text{因数分解})$$

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}, \quad \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a} \quad (\text{解と係数の関係})$$

解説 $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ とおくと、 α が方程式 $P(x)=0$ の解であることから $P(\alpha)=0$ によって、因数定理により $P(x)$ は因数 $(x-\alpha)$ をもつ。 β, γ についても同様であるから

$$P(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)Q(x) \quad \text{ただし } Q(x) \text{ は多項式}$$

と表せる。 $P(x)$ は x の3次式で、 x^3 の係数が a であることを考慮すると $Q(x)=a$ すなわち

$$ax^3+bx^2+cx+d=a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) \quad \dots\dots\textcircled{1}$$

となる。 $\textcircled{1}$ の両辺を a で割ると

$$x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

右边を展開して $=x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma$

両辺の係数を比較すると $\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}, \quad \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$

例題1 3次方程式 $3x^3+4x^2+ax+b=0$ は2つの解 $-1\pm\sqrt{2}i$ をもつという。定数 a, b と他の解を求めよ。

解 $\alpha=-1+\sqrt{2}i, \beta=-1-\sqrt{2}i$, 他の解を γ とすると $\alpha+\beta=-2, \alpha\beta=3 \quad \dots\dots(*)$

解と係数の関係を用いて

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{4}{3} \quad \text{から} \quad -2+\gamma=-\frac{4}{3} \quad \text{ゆえに} \quad \gamma=\frac{2}{3}$$

$$\frac{a}{3}=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\alpha\beta+(\alpha+\beta)\gamma=3+(-2)\cdot\frac{2}{3}=\frac{5}{3} \quad \text{ゆえに} \quad a=5$$

$$-\frac{b}{3}=\alpha\beta\gamma=(-2)\cdot\frac{2}{3}=2 \quad \text{より} \quad b=-6$$

別解 (*) まで同様。

$$3x^3+4x^2+ax+b=3(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) \quad \dots\dots\textcircled{1}$$

とおける。右边は

$$3\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}(x-\gamma)=3(x^2+2x+3)(x-\gamma)=3x^3+(6-3\gamma)x^2+(9-6\gamma)x-9\gamma \quad \dots\dots\textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ の左辺と $\textcircled{2}$ の係数を比較して

$$4=6-3\gamma, \quad a=9-6\gamma, \quad b=-9\gamma \quad \text{これを解いて} \quad \gamma=\frac{2}{3}, \quad a=5, \quad b=-6$$

例題2 3次方程式 $x^3-3x^2+5x+7=0$ の3つの解を α, β, γ とするとき、次の式の値を求めよ。

$$(1) \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \quad (2) (\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta) \quad (3) \alpha^3+\beta^3+\gamma^3$$

解 解と係数の関係により $\alpha+\beta+\gamma=3, \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=5, \alpha\beta\gamma=-7$

$$(1) \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=3^2-2\cdot 5=-1$$

$$(2) (\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=[\alpha+(\beta+\gamma)]\{(\beta+\gamma)\alpha+\beta\gamma\} \quad \leftarrow \alpha \text{ について整理}$$

$$=(\beta+\gamma)\alpha^2+(\beta+\gamma)^2\alpha+\beta\gamma\alpha+(\beta+\gamma)\beta\gamma$$

$$=(\beta+\gamma)\{\alpha^2+(\beta+\gamma)\alpha+\beta\gamma\}+\alpha\beta\gamma$$

$$=(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)+\alpha\beta\gamma \quad \text{であるから}$$

$$(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma \quad \leftarrow \text{対称式は基本対称式で表せる}$$

$$=3\cdot 5-(-7)=22$$

別解1

$\alpha+\beta+\gamma=3$ より $\beta+\gamma=3-\alpha, \gamma+\alpha=3-\beta, \alpha+\beta=3-\gamma$ を用いて

$$(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)=(3-\alpha)(3-\beta)(3-\gamma) \quad \dots\dots(**)$$

$$=27-9(\alpha+\beta+\gamma)+3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma$$

$$=27-9\cdot 3+3\cdot 5-(-7)=22$$

別解2 (**) の計算について

$P(x)=x^3-3x^2+5x+7$ とおくと、 $P(x)=0$ の3つの解が α, β, γ であるから

$$P(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

$$\text{ゆえに} \quad (3-\alpha)(3-\beta)(3-\gamma)=P(3)=3^3-3\cdot 3^2+5\cdot 3+7=22$$

別解3

$$(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)=(\beta+\gamma)\{\alpha^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\} \quad \leftarrow \beta, \gamma \text{ を } \alpha \text{ だけで表す方針}$$

$$=(3-\alpha)(\alpha^2+5)=-\alpha^3+3\alpha^2-5\alpha+15$$

α は $x^3-3x^2+5x+7=0$ の解であるから $\alpha^3-3\alpha^2+5\alpha+7=0$ したがって

$$(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)=-(\alpha^3-3\alpha^2+5\alpha)+15=-(-7)+15=22$$

(3) α は $x^3-3x^2+5x+7=0$ の解であるから $\alpha^3-3\alpha^2+5\alpha+7=0$

$$\text{ゆえに} \quad \alpha^3=3\alpha^2-5\alpha-7$$

β, γ についても同様にして $\beta^3=3\beta^2-5\beta-7, \gamma^3=3\gamma^2-5\gamma-7$

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)-5(\alpha+\beta+\gamma)-3\cdot 7$$

$$=3(-1)-5\cdot 3-3\cdot 7=-39 \quad \leftarrow (1) \text{ で得た値を用いる}$$

別解

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)+3\alpha\beta\gamma=3(-1-5)+3(-7)=-39$$