

1の虚数3乗根

3次方程式 $x^3=1$ の解は3つ存在し、それらを1の3乗根(立方根)という。実際方程式を解くと

$$x^3-1=0 \quad \text{より} \quad (x-1)(x^2+x+1)=0$$

$$x-1=0, \quad x^2+x+1=0$$

$$\text{ゆえに} \quad x=1, \quad x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$$

すなわち、1の3乗根は実数解1と2つの互いに共役な虚数解 $\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ となる。

ここで、虚数解の一方を ω とおくと、他方は ω^2 で表される。

$$\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \quad \text{のとき} \quad \omega^2=\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2=\frac{1-2\sqrt{3}i+3i^2}{4}=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

$$\omega=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2} \quad \text{のとき} \quad \omega^2=\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)^2=\frac{1+2\sqrt{3}i+3i^2}{4}=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$

したがって、次のことが成り立つ。

$$\begin{aligned} &1 \text{ の } 3 \text{ 乗根のうち、虚数解の } 1 \text{ つを } \omega \text{ とすると} \\ &\text{他の虚数解は } \overline{\omega}=\omega^2, \quad \omega^3=1, \quad \omega^2+\omega+1=0 \end{aligned}$$

これらは次のように言い換えることができる。

$$\begin{aligned} &2 \text{ 次方程式 } x^2+x+1=0 \text{ の解の } 1 \text{ つを } \omega \text{ とすると} \\ &\text{他の解は } \omega^2, \quad \omega^3=1 \end{aligned}$$

ω は $x^2+x+1=0$ の解であるから $\omega^2+\omega+1=0$ 、この式の両辺に $\omega-1$ をかけると

$$(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0 \quad \text{より} \quad \omega^3-1=0 \quad \text{ゆえに} \quad \omega^3=1 \quad \dots\dots\textcircled{1}$$

①は $\omega^2+\omega+1=0$ を繰り返して用いることで示すこともできる。

$$\omega^3=\omega \cdot \omega^2=\omega(-\omega-1)=-\omega^2-\omega=-(-\omega-1)-\omega=1$$

次に、 $x=\omega^2$ のとき

$$x^2+x+1=(\omega^2)^2+\omega^2+1=\omega^3 \cdot \omega+\omega^2+1=\omega+\omega^2+1=0$$

すなわち、 ω^2 も $x^2+x+1=0$ の解である。

$x^2+x+1=0$ の判別式を D とすると、 $D=1^2-4<0$ であるから、異なる2つの虚数解をもつ。

すなわち、 ω と ω^2 は共役な虚数である。解と係数の関係を用いると

$$\omega+\overline{\omega}=-1, \quad \omega\overline{\omega}=1$$

例題1 ω を $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ を満たす複素数とすると、次の問いに答えよ。

- (1) $\omega^3 = 1$ であることを示せ。
- (2) 次の式 P を展開し、 a, b, c のみの式で表せ。

$$P = (a+b+c)(a+b\omega+c\omega^2)(a+b\omega^2+c\omega^4)$$

解 (1) 略 (2) $\omega^3 = 1, \omega^4 = \omega, \omega^2 + \omega^4 = \omega^2 + \omega = -1$ を用いると

$$\begin{aligned} (a+b\omega+c\omega^2)(a+b\omega^2+c\omega^4) &= \{a+(b\omega+c\omega^2)\}\{a+(b\omega^2+c\omega)\} \\ &= a^2 + (b\omega+c\omega^2+b\omega^2+c\omega)a + (b\omega+c\omega^2)(b\omega^2+c\omega) \\ &= a^2 + (b+c)(\omega^2+\omega)a + b^2\omega^3 + bc(\omega^2+\omega^4) + c^2\omega^3 \\ &= a^2 - (b+c)a + b^2 - bc + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \\ P &= (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \end{aligned}$$

例題2 x の整式 $P(x) = x^{75} - 2x^{50} + 3x^{25}$ を $x^2 + x + 1$ で割った余りを $ax + b$ とする。ただし、 a, b は実数である。

- (1) $x^2 + x + 1 = 0$ の解の1つを ω とするとき、 $P(\omega)$ を a, b を含まない ω の1次式で表せ。
- (2) a, b の値を求めよ。

解 (1) ω は $x^2 + x + 1 = 0$ の解であるから $\omega^2 + \omega + 1 = 0$

$$\omega^3 = \omega \cdot \omega^2 = \omega(-\omega - 1) = -\omega^2 - \omega = -(-\omega - 1) - \omega = 1$$

$$\begin{aligned} P(\omega) &= \omega^{75} - 2\omega^{50} + 3\omega^{25} = (\omega^3)^{25} - 2(\omega^3)^{16}\omega^2 + 3(\omega^3)^8\omega \\ &= 1 - 2(-\omega - 1) + 3\omega = 5\omega + 3 \end{aligned}$$

(2) $P(x)$ を $x^2 + x + 1$ で割ったときの商を $Q(x)$ とすると

$$P(x) = (x^2 + x + 1)Q(x) + ax + b$$

$x = \omega$ として $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ を用いると

$$P(\omega) = (\omega^2 + \omega + 1)Q(\omega) + a\omega + b = a\omega + b$$

(1) より $a\omega + b = 5\omega + 3$ ゆえに $(a-5)\omega = -b+3$

$a-5 \neq 0$ とすると、左辺は虚数となり、右辺が実数であることに矛盾する。ゆえに

$$a = 5, \quad b = 3$$

例題3 3次方程式 $x^3 + 1 = 0$ の虚数解の1つを α とするとき、次の式の値を求めよ。 \leftarrow

$$\alpha^{300} + \alpha^{200} + \alpha^{100} + \frac{1}{\alpha^{100}} + \frac{1}{\alpha^{200}} + \frac{1}{\alpha^{300}} \quad \alpha \text{ は } -1 \text{ の } 3 \text{ 乗根}$$

解 α は $x^3 + 1 = 0$ の解であるから $\alpha^3 + 1 = 0$ ゆえに $\alpha^3 = -1$ また $\frac{1}{\alpha} = -\alpha^2, \frac{1}{\alpha^2} = -\alpha$

また α は虚数だから $\alpha + 1 \neq 0$, これを用いて $(\alpha+1)(\alpha^2 - \alpha + 1) = 0$ より $\alpha^2 - \alpha + 1 = 0$

$$\text{与式} = (\alpha^3)^{100} + (\alpha^3)^{66} \alpha^2 + (\alpha^3)^{33} \alpha + \frac{1}{(\alpha^3)^{100}} + \frac{1}{(\alpha^3)^{66} \alpha^2} + \frac{1}{(\alpha^3)^{33} \alpha}$$

$$= 1 + \alpha^2 - \alpha + 1 + \frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha} = 2 - 2\alpha + 2\alpha^2 = 0$$