

共役複素数

定義 2乗すると -1 となる数, すなわち $x^2 = -1$ の解の1つを i と書き **虚数単位** という。実数 a, b に対し $a+bi$ の形で表される数を **複素数** という。

複素数 $\alpha = a+bi$ に対し, a を α の **実部** (real part) といい $\operatorname{Re} \alpha$ で, b を α の **虚部** (imaginary part) といい $\operatorname{Im} \alpha$ で表す。虚部が 0 でない ($b \neq 0$) ときの α を **虚数** といい, 虚数のうち $a=0$ であるものを **純虚数** という。絶対値を $|\alpha| = \sqrt{a^2 + b^2}$ で定義する。

$\alpha = a+bi$ に対し, $\bar{\alpha} = a-bi$ を α の **共役複素数** という。また, α と $\bar{\alpha}$ は **互いに共役** であるという。

共役複素数の性質

$$\alpha \text{ は実数} \Leftrightarrow \bar{\alpha} = \alpha, \quad \alpha \text{ は純虚数} \Leftrightarrow \bar{\alpha} = -\alpha, \quad \alpha \neq 0$$

$$\overline{\alpha + \beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}, \quad \overline{\alpha\beta} = \bar{\alpha}\bar{\beta}, \quad \overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} = \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}} \quad (\beta \neq 0)$$

$$\alpha\bar{\alpha} = |\alpha|^2 = a^2 + b^2$$

解説 $\alpha = a+bi, \bar{\alpha} = a-bi$ のとき

$$\alpha - \bar{\alpha} = 2bi \text{ であるから } \alpha \text{ は実数} \Leftrightarrow b=0 \Leftrightarrow \bar{\alpha} = \alpha$$

$$\alpha + \bar{\alpha} = 2ai \text{ であるから } \alpha \text{ は純虚数} \Leftrightarrow a=0, b \neq 0 \Leftrightarrow \bar{\alpha} = -\alpha, \alpha \neq 0$$

$\beta = c+di$ とすると

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{(ac+bd) + (bc-ad)i}{c^2+d^2} \quad \text{より}$$

$$\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} = \frac{(ac+bd) - (bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

$$\text{一方 } \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}} = \frac{a-bi}{c-di} = \frac{(a-bi)(c+di)}{(c-di)(c+di)} = \frac{(ac+bd) - (bc-ad)i}{c^2+d^2} \quad \text{ゆえに } \overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} = \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}$$

$\overline{\alpha + \beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}, \overline{\alpha\beta} = \bar{\alpha}\bar{\beta}, \alpha\bar{\alpha} = a^2 + b^2$ についても同様である。

共役複素数の解

実数係数の方程式 $P(x) = 0$ について

$$\alpha \text{ が解, すなわち } P(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \bar{\alpha} \text{ が解, すなわち } P(\bar{\alpha}) = 0$$

解説 α が実数係数の2次方程式 $px^2 + qx + r = 0$ の解であるならば $p\alpha^2 + q\alpha + r = 0$

$$\text{両辺の共役複素数をとると } \overline{p\alpha^2 + q\alpha + r} = \bar{0} \quad \text{これから } \bar{p}(\bar{\alpha})^2 + \bar{q}\bar{\alpha} + \bar{r} = 0$$

$$p, q, r \text{ は実数であるから } p = \bar{p}, q = \bar{q}, r = \bar{r} \quad \text{したがって } p(\bar{\alpha})^2 + q\bar{\alpha} + r = 0$$

すなわち, $\bar{\alpha}$ も $px^2 + qx + r = 0$ の解である。3次以上の高次方程式についても同様。