

華麗なる三角関数の等式その4

問題 次の等式を証明せよ。

$$(1) \cos 36^\circ \cos 72^\circ = \frac{1}{4}$$

$$(2) \cos 36^\circ - \cos 72^\circ = \frac{1}{2}$$

$$(3) 4 \sin^2 18^\circ + 2 \sin 18^\circ - 1 = 0$$

$$(4) 4 \cos^2 36^\circ - 2 \cos 36^\circ - 1 = 0$$

$$(5) \sin 36^\circ \sin 72^\circ = \frac{\sqrt{5}}{4}$$

類題 (i) $\cos 5\theta = f(\cos \theta)$ を満たす多項式 $f(x)$ を求めよ。

(ii) $\alpha = 18^\circ$ とするとき, $\cos \alpha \cos 3\alpha \cos 7\alpha \cos 9\alpha = \frac{5}{16}$ を示せ。 (京都大)

華麗なる三角関数の等式その4

問題 次の等式を証明せよ。

$$(1) \cos 36^\circ \cos 72^\circ = \frac{1}{4}$$

解 $\cos 36^\circ \cos 72^\circ$ に $\sin 36^\circ$ をかけたものを考え、2倍角の公式を用いると

$$\sin 36^\circ \cos 36^\circ \cos 72^\circ = \frac{1}{2} \sin 72^\circ \cos 72^\circ = \frac{1}{4} \sin 144^\circ = \frac{1}{4} \sin 36^\circ$$

ここで、 $\sin 36^\circ \neq 0$ であるから、両辺を $\sin 36^\circ$ で割って

$$\cos 36^\circ \cos 72^\circ = \frac{1}{4}$$

別解 $AB=AC$ の二等辺三角形 ABC において、 $\angle A=36^\circ$ とすると

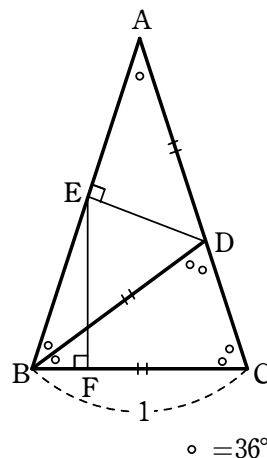
$\angle B=\angle C=72^\circ$ 、 $\angle B$ の二等分線と AC の交点を D 、 D から AB にひいた垂線を DE 、 E から BC にひいた垂線を EF とする。

$BC=1$ とすると、 $DB=DA=1$ 、また $BF=\frac{1}{4}$

$$EB=DB \cos 36^\circ = \cos 36^\circ$$

$$BF=EB \cos 72^\circ = \cos 36^\circ \cos 72^\circ$$

$$\text{ゆえに } \cos 36^\circ \cos 72^\circ = \frac{1}{4}$$



$$(2) \cos 36^\circ - \cos 72^\circ = \frac{1}{2}$$

解 和・差を積になおす公式を用いると

$$\begin{aligned} \cos 36^\circ - \cos 72^\circ &= \cos(54^\circ - 18^\circ) - \cos(54^\circ + 18^\circ) = 2 \sin 54^\circ \sin 18^\circ \\ &= 2 \cos 36^\circ \cos 72^\circ \end{aligned}$$

(1) より $\cos 36^\circ \cos 72^\circ = \frac{1}{4}$ であるから $\cos 36^\circ - \cos 72^\circ = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

別解 (2) の別解と同じ二等辺三角形 ABC において、 C から AB へ

垂線 CH をひく。 $\triangle ABC \sim \triangle BCD$ より

$$AB : BC = BC : CD \quad \text{ゆえに} \quad AB \cdot CD = 1$$

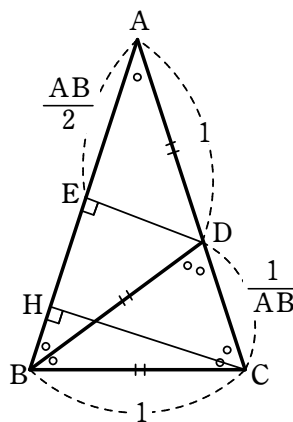
$ED \parallel HC$ であるから

$$AE : EH = AD : DC \quad \text{より} \quad \frac{AB}{2} : EH = 1 : CD$$

$$\text{ゆえに} \quad EH = \frac{AB}{2} \cdot CD = \frac{1}{2}$$

また、 $EH = EB - HB = DB \cos 36^\circ - BC \cos 72^\circ = \cos 36^\circ - \cos 72^\circ$

$$\text{したがって} \quad \cos 36^\circ - \cos 72^\circ = \frac{1}{2}$$



(3) $4 \sin^2 18^\circ + 2 \sin 18^\circ - 1 = 0$

解 (2) より $\cos 36^\circ - \sin 18^\circ = \frac{1}{2}$, これに 2 倍角の公式を用いると

$$(1 - 2 \sin^2 18^\circ) - \sin 18^\circ = \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad 4 \sin^2 18^\circ + 2 \sin 18^\circ - 1 = 0$$

別解 $\alpha = 18^\circ$ とおくと $5\alpha = 90^\circ$ より $2\alpha = 90^\circ - 3\alpha$, これから

$$\sin 2\alpha = \sin(90^\circ - 3\alpha) \quad \text{ゆえに} \quad \sin 2\alpha = \cos 3\alpha$$

2 倍角, 3 倍角の公式を用いると

$$2 \sin \alpha \cos \alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

$\cos \alpha \neq 0$ であるから, 両辺を $\cos \alpha$ で割ると

$$2 \sin \alpha = 4 \cos^2 \alpha - 3 \quad \text{より} \quad 2 \sin \alpha = 4(1 - \sin^2 \alpha) - 3$$

$$\text{したがって} \quad 4 \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha - 1 = 0$$

参考 これから $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$ も得られる。

(4) $4 \cos^2 36^\circ - 2 \cos 36^\circ - 1 = 0$

解 (2) において, 2 倍角の公式を用いると

$$\cos 36^\circ - (2 \cos^2 36^\circ - 1) = \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad 4 \cos^2 36^\circ - 2 \cos 36^\circ - 1 = 0$$

別解 $\beta = 36^\circ$ とおくと $5\beta = 180^\circ$ より $3\beta = 180^\circ - 2\beta$, これから

$$\sin 3\beta = \sin(180^\circ - 2\beta) \quad \text{ゆえに} \quad \sin 3\beta = \sin 2\beta$$

2 倍角, 3 倍角の公式を用いると

$$3 \sin \beta - 4 \sin^3 \beta = 2 \sin \beta \cos \beta$$

$\sin \beta \neq 0$ であるから, 両辺を $\sin \beta$ で割ると

$$3 - 4 \sin^2 \beta = 2 \cos \beta \quad \text{より} \quad 3 - 4(1 - \cos^2 \beta) = 2 \cos \beta$$

$$\text{したがって} \quad 4 \cos^2 \beta - 2 \cos \beta - 1 = 0$$

参考 これから $\cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}$ も得られる。

$$(5) \sin 36^\circ \sin 72^\circ = \frac{\sqrt{5}}{4}$$

解 半角の公式を用いると

$$\begin{aligned} (\sin 36^\circ \sin 72^\circ)^2 &= (\sin 36^\circ \cos 18^\circ)^2 = \sin^2 36^\circ \cos^2 18^\circ \\ &= \frac{1 - \cos 72^\circ}{2} \cdot \frac{1 + \cos 36^\circ}{2} = \frac{1 + \cos 36^\circ - \cos 72^\circ - \cos 36^\circ \cos 72^\circ}{4} \end{aligned}$$

(1), (2) より $\cos 36^\circ \cos 72^\circ = \frac{1}{4}$, $\cos 36^\circ - \cos 72^\circ = \frac{1}{2}$ であるから

$$(\sin 36^\circ \sin 72^\circ)^2 = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{5}{16} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\sin 36^\circ \sin 72^\circ > 0$ より

$$\sin 36^\circ \sin 72^\circ = \frac{\sqrt{5}}{4}$$

類題 (i) $\cos 5\theta = f(\cos \theta)$ を満たす多項式 $f(x)$ を求めよ。

(ii) $\alpha = 18^\circ$ とするとき, $\cos \alpha \cos 3\alpha \cos 7\alpha \cos 9\alpha = \frac{5}{16}$ を示せ。 (京都大)

解 (i) 2倍角, 3倍角の公式を用いる。途中, $\cos \theta = c$, $\sin \theta = s$ とかくことにする。

$$\begin{aligned} \cos 5\theta &= \cos(3\theta + 2\theta) = \cos 3\theta \cos 2\theta - \sin 3\theta \sin 2\theta \\ &= (4c^3 - 3c)(2c^2 - 1) - (3s - 4s^3) \cdot 2sc \\ &= (8c^5 - 10c^3 + 3c) - 2cs^2(3 - 4s^2) \\ &= (8c^5 - 10c^3 + 3c) - 2c(1 - c^2)\{3 - 4(1 - c^2)\} \\ &= (8c^5 - 10c^3 + 3c) + (8c^5 - 10c^3 + 2c) \\ &= 16c^5 - 20c^3 + 5c \end{aligned}$$

$$\text{ゆえに } f(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$

(ii) $\theta = \alpha, 3\alpha, 5\alpha, 7\alpha, 9\alpha$ のとき, $5\theta = 90^\circ, 270^\circ, 450^\circ, 630^\circ, 810^\circ$ であるから

$$\cos 5\theta = 16 \cos^5 \theta - 20 \cos^3 \theta + 5 \cos \theta = 0$$

となる。すなわち $\cos \alpha, \cos 3\alpha, \cos 5\alpha, \cos 7\alpha, \cos 9\alpha$ は

$$16x^5 - 20x^3 + 5x = 0$$

の解であり, おのおの互いに異なる。ゆえに

$$16x^5 - 20x^3 + 5x = 16(x - \cos \alpha)(x - \cos 3\alpha)(x - \cos 5\alpha)(x - \cos 7\alpha)(x - \cos 9\alpha)$$

$\cos 5\alpha = 0$ であるから

$$16x^5 - 20x^3 + 5x = 16x(x - \cos \alpha)(x - \cos 3\alpha)(x - \cos 7\alpha)(x - \cos 9\alpha)$$

両辺の x の係数を比較すると

$$5 = 16 \cos \alpha \cos 3\alpha \cos 7\alpha \cos 9\alpha \quad \text{ゆえに } \cos \alpha \cos 3\alpha \cos 7\alpha \cos 9\alpha = \frac{5}{16}$$