

n倍角の公式 — チェビシエフの多項式 —

■ $\cos n\theta$ について

2倍角, 3倍角の公式は

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

となり, $\cos n\theta$ は $n=2, 3$ のとき $\cos\theta$ の多項式で表される。一般に, 正の整数 n について, $\cos n\theta$ が $\cos\theta$ の多項式で表されることは, 以下のようにして示すことができる。

加法定理から

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2\cos\alpha \cos\beta$$

が成り立つが, この式において, $\alpha=(n+1)\theta$, $\beta=\theta$ とおくと

$$\cos(n+2)\theta + \cos n\theta = 2\cos(n+1)\theta \cos\theta$$

であるから

$$\cos(n+2)\theta = 2\cos\theta \cos(n+1)\theta - \cos n\theta$$

となる。これから, $\cos n\theta$ と $\cos(n+1)\theta$ が $\cos\theta$ の多項式であれば, 当然 $\cos(n+2)\theta$ も $\cos\theta$ の多項式であることがわかる。たとえば $n=2$ とすると, $\cos 4\theta$ について

$$\begin{aligned} \cos 4\theta &= 2\cos\theta \cos 3\theta - \cos 2\theta \\ &= 2\cos\theta (4\cos^3\theta - 3\cos\theta) - (2\cos^2\theta - 1) \\ &= 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1 \end{aligned}$$

のように, 具体的な多項式の形を求めることができる。

以上のことは, 次のようにまとめられる。

$$n \text{ を正の整数とするととき } \cos n\theta = T_n(\cos\theta)$$

ここで $T_n(x)$ は次の漸化式から求められる。

$$T_1(x) = x, \quad T_2(x) = 2x^2 - 1, \quad T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x)$$

$T_n(x)$ は x の n 次多項式で, チェビシエフの多項式といわれる。 $n=1, \dots, 5$ については

$$\cos 1\theta = \cos\theta$$

$$T_1(x) = x$$

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

$$T_3(x) = 2x(2x^2 - 1) - x = 4x^3 - 3x$$

$$\cos 4\theta = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1$$

$$T_4(x) = 2x(4x^3 - 3x) - (2x^2 - 1) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

$$\cos 5\theta = 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta$$

$$T_5(x) = 2x(8x^4 - 8x^2 + 1) - (4x^3 - 3x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$

■ $\sin n\theta$ について

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta \cos\theta$$

$$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$$

であるから, $\sin n\theta$ は $\sin\theta$ の n 次多項式で表すことはできない。 $\sin n\theta$ については

$$\sin n\theta = (\cos\theta \text{ の } n-1 \text{ 次多項式}) \times \sin\theta$$

のように表される。

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2\sin\alpha \cos\beta$$

において $\alpha=(n+1)\theta$, $\beta=\theta$ とおくと, 漸化式

$$\sin(n+2)\theta = 2\cos\theta \sin(n+1)\theta - \sin n\theta$$

が得られる。これと

$$\sin 1\theta = 1 \cdot \sin\theta$$

$$\sin 2\theta = 2\cos\theta \cdot \sin\theta$$

から, 次のようにまとめられる。

$$n \text{ を正の整数とするととき } \sin n\theta = S_{n-1}(\cos\theta) \cdot \sin\theta$$

$$\text{ここで } S_0(x) = 1, \quad S_1(x) = 2x, \quad S_{n+2}(x) = 2xS_{n+1}(x) - S_n(x)$$

$S_n(x)$ は x の n 次多項式である。 $n=1, \dots, 5$ については

$$\sin 1\theta = 1 \cdot \sin\theta$$

$$S_0(x) = 1$$

$$\sin 2\theta = 2\cos\theta \cdot \sin\theta$$

$$S_1(x) = 2x$$

$$\sin 3\theta = (4\cos^2\theta - 1)\sin\theta$$

$$S_2(x) = 2x \cdot 2x - 1 = 4x^2 - 1$$

$$= (3 - 4\sin^2\theta)\sin\theta$$

$$\sin 4\theta = (8\cos^3\theta - 4\cos\theta)\sin\theta$$

$$S_3(x) = 2x(4x^2 - 1) - 2x = 8x^3 - 4x$$

$$\sin 5\theta = (16\cos^4\theta - 12\cos^2\theta + 1)\sin\theta$$

$$S_4(x) = 2x(8x^3 - 4x) - (4x^2 - 1) = 16x^4 - 12x^2 + 1$$

$$= (16\sin^4\theta - 20\sin^2\theta + 5)\sin\theta$$

■ $T_n(x)$ と $S_n(x)$ の関係

$\cos n\theta = T_n(\cos\theta)$ の両辺を θ について微分すると

$$-n\sin n\theta = T_n'(\theta) \cdot (-\sin\theta) \quad \text{すなわち} \quad \sin n\theta = \frac{1}{n} T_n'(\cos\theta) \cdot \sin\theta$$

$$\text{よって } S_{n-1}(x) = \frac{1}{n} T_n'(x)$$

■ n倍角公式の積表示

n を正の整数とするとき

$$\cos n\theta = 2^{n-1} \prod_{k=1}^n \sin\left(\theta + \frac{2k-1}{2n}\pi\right) = 2^{n-1} \prod_{k=1}^n \cos\left(\theta + \frac{2k-1-n}{2n}\pi\right)$$

$$\sin n\theta = 2^{n-1} \prod_{k=1}^n \sin\left(\theta + \frac{k-1}{n}\pi\right)$$

証明 $T_1(x)=x, T_2(x)=2x^2-1, T_{n+2}(x)=2xT_{n+1}(x)-T_n(x)$

により, $T_n(x)$ は n 次多項式で x^n の係数は 2^{n-1} である。また

$$\cos n\theta = T_n(\cos\theta)$$

であるから, ここで

$$\theta_k = \frac{2k-1}{2n}\pi \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

とすると, $0 < \theta_k < \pi$ から $\cos\theta_k$ は異なる n 個の実数であり

$$\cos n\theta_k = \cos\left(k - \frac{1}{2}\right)\pi = 0 \quad \text{より} \quad T_n(\cos\theta_k) = 0$$

すなわち, $\cos\theta_k$ は n 次方程式 $T_n(x)=0$ の解である。したがって, 因数定理により

$$T_n(x) = 2^{n-1} \prod_{k=1}^n \left(x - \cos\frac{2k-1}{2n}\pi\right)$$

$$\text{ゆえに} \quad \cos n\theta = T_n(\cos\theta) = 2^{n-1} \prod_{k=1}^n \left(\cos\theta - \cos\frac{2k-1}{2n}\pi\right)$$

$n \geq 2$ のとき, 上の式の因数の積のなかには

$$(\cos\theta - \cos\alpha)(\cos\theta - \cos\beta) \quad \text{ただし} \quad \alpha = \frac{2k-1}{2n}\pi, \quad \beta = \pi - \alpha = \frac{2(n-k+1)-1}{2n}\pi$$

となるものが存在する。これは

$$\begin{aligned} (\cos\theta - \cos\alpha)(\cos\theta - \cos\beta) &= (\cos\theta - \cos\alpha)(\cos\theta + \cos\alpha) \\ &= \cos^2\theta - \cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} - \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \\ &= \frac{1}{2}(\cos 2\theta - \cos 2\alpha) = \frac{1}{2}[\cos\{(\theta + \alpha) + (\theta - \alpha)\} - \cos\{(\theta + \alpha) - (\theta - \alpha)\}] \\ &= -\sin(\theta + \alpha)\sin(\theta - \alpha) = -\sin(\theta + \alpha)\sin(\theta + \beta - \pi) \\ &= \sin(\theta + \alpha)\sin(\theta + \beta) \quad \dots\dots(*) \end{aligned}$$

となる。したがって

$$\cos n\theta = 2^{n-1} \prod_{k=1}^n \sin\left(\theta + \frac{2k-1}{2n}\pi\right)$$

この式は, $n=1$ のときも成り立つ。

また, $\sin(\theta + \alpha) = \cos\left(\theta + \alpha - \frac{\pi}{2}\right)$ を用いると

$$\cos n\theta = 2^{n-1} \prod_{k=1}^n \cos\left(\theta + \frac{2k-1-n}{2n}\pi\right)$$

次に

$$S_0(x)=1, S_1(x)=2x, S_{n+2}(x)=2xS_{n+1}(x)-S_n(x)$$

により, $S_{n-1}(x)$ は $n-1$ 次多項式で x^{n-1} の係数は 2^{n-1} である。また

$$\sin n\theta = S_{n-1}(\cos\theta) \cdot \sin\theta$$

であるから, ここで, $n \geq 2$ のとき

$$\theta_k = \frac{k-1}{n}\pi \quad (k=2, 3, \dots, n)$$

とすると, $0 < \theta_k < \pi$ から $\cos\theta_k$ は異なる $n-1$ 個の実数であり

$$\sin n\theta_k = \sin(k-1)\pi = 0, \quad \sin\theta_k \neq 0 \quad \text{より} \quad S_{n-1}(\cos\theta_k) = 0$$

すなわち, $\cos\theta_k$ は $n-1$ 次方程式 $S_{n-1}(x)=0$ の解である。したがって, 因数定理により

$$S_{n-1}(x) = 2^{n-1} \prod_{k=2}^n \left(x - \cos\frac{k-1}{n}\pi\right)$$

$$\text{すなわち} \quad S_{n-1}(\cos\theta) = 2^{n-1} \prod_{k=2}^n \left(\cos\theta - \cos\frac{k-1}{n}\pi\right)$$

(*) と同様にして

$$S_{n-1}(\cos\theta) = 2^{n-1} \prod_{k=2}^n \sin\left(\theta + \frac{k-1}{n}\pi\right)$$

したがって

$$\sin n\theta = S_{n-1}(\cos\theta) \cdot \sin\theta = 2^{n-1} \prod_{k=1}^n \sin\left(\theta + \frac{k-1}{n}\pi\right)$$

この式は, $n=1$ のときも成り立つ。

(証明終)

$$\text{例} \quad \cos 2\theta = 2\sin\left(\theta + \frac{1}{4}\pi\right)\sin\left(\theta + \frac{3}{4}\pi\right) = 2\cos\left(\theta - \frac{1}{4}\pi\right)\cos\left(\theta + \frac{1}{4}\pi\right)$$

$$\cos 3\theta = 4\sin\left(\theta + \frac{1}{6}\pi\right)\sin\left(\theta + \frac{3}{6}\pi\right)\sin\left(\theta + \frac{5}{6}\pi\right)$$

$$= 4\cos\left(\theta - \frac{1}{3}\pi\right)\cos\theta\cos\left(\theta + \frac{1}{3}\pi\right)$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\sin\left(\theta + \frac{1}{2}\pi\right)$$

$$\sin 3\theta = 4\sin\theta\sin\left(\theta + \frac{1}{3}\pi\right)\sin\left(\theta + \frac{2}{3}\pi\right)$$