

漸化式で表される数列の極限

問題1 数列 $\{a_n\}$ を次の式で定義する。

$$a_1 = -\frac{3}{2}, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

- (1) 数列 $\{a_n\}$ が収束すると仮定して、その極限値を求めよ。
- (2) 数列 $\{a_n\}$ が(1)で求めた値に実際に収束することを証明せよ。

問題2 $x > \sqrt{2}$ とする。 $y = \frac{3x+4}{2x+3}$ とするとき、次の問いに答えよ。

(1) $\frac{y-\sqrt{2}}{x-\sqrt{2}} = \frac{3-2\sqrt{2}}{2x+3}$ を示せ。 (2) $0 < \frac{y-\sqrt{2}}{x-\sqrt{2}} < (3-2\sqrt{2})^2$ を示せ。

(3) $x_1 = 2, \quad x_{n+1} = \frac{3x_n + 4}{2x_n + 3} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$ で定義される数列を $\{x_n\}$ とする。

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ を求めよ。

[09 長岡技科大]

漸化式で定まる数列の極限

問題1 数列 $\{a_n\}$ を次の式で定義する。

$$a_1 = -\frac{3}{2}, a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

- (1) 数列 $\{a_n\}$ が収束すると仮定して、その極限值を求めよ。
 (2) 数列 $\{a_n\}$ が (1) で求めた値に実際に収束することを証明せよ。

解 (1) $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}$ ……①

とする。 $n \rightarrow \infty$ のとき、 $a_n \rightarrow \alpha$ と仮定すると、 $a_{n+1} \rightarrow \alpha$ であるから、①により

$$\alpha = \sqrt{\alpha + 2} \quad \dots\dots②$$

両辺を平方して

$$\alpha^2 = \alpha + 2 \quad \text{かつ} \quad \alpha > 0 \quad \text{ゆえに} \quad \alpha = 2$$

(2) $a_{n+1} - 2 = \sqrt{a_n + 2} - 2 = \frac{1}{\sqrt{a_n + 2} + 2}(a_n - 2)$

ここで、 $\sqrt{a_n + 2} > 0$ より $\frac{1}{\sqrt{a_n + 2} + 2} < \frac{1}{2}$ であるから

$$|a_{n+1} - 2| = \frac{1}{\sqrt{a_n + 2} + 2} |a_n - 2| < \frac{1}{2} |a_n - 2|$$

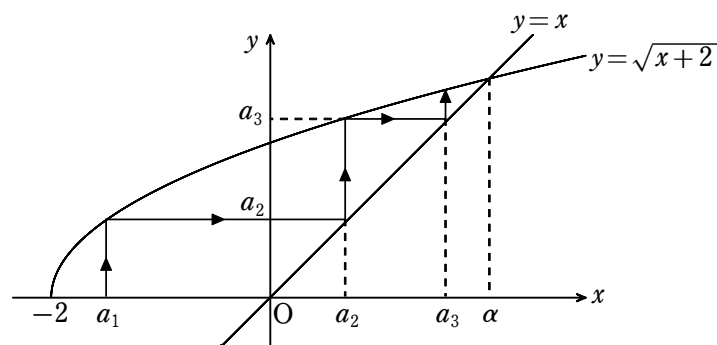
これを繰り返し用いて

$$|a_n - 2| < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |a_1 - 2| = \frac{7}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$n \rightarrow \infty$ のとき、 $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \rightarrow 0$ より $|a_n - 2| \rightarrow 0$ すなわち $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$

参考 漸化式 $a_{n+1} = f(a_n)$ 、 $f(x) = \sqrt{x+2}$ を用いて、 a_n から a_{n+1} を求める手順は、下のよう

$y = \sqrt{x+2}$ と $y = x$ のグラフを利用して視覚化することができる。



問題2 $x > \sqrt{2}$ とする。 $y = \frac{3x+4}{2x+3}$ とするとき、次の問いに答えよ。

(1) $\frac{y-\sqrt{2}}{x-\sqrt{2}} = \frac{3-2\sqrt{2}}{2x+3}$ を示せ。 (2) $0 < \frac{y-\sqrt{2}}{x-\sqrt{2}} < (3-2\sqrt{2})^2$ を示せ。

(3) $x_1 = 2, x_{n+1} = \frac{3x_n+4}{2x_n+3}$ ($n=1, 2, 3, \dots$) で定義される数列を $\{x_n\}$ とする。

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ を求めよ。

[09 長岡技科大]

解 (1) $y - \sqrt{2} = \frac{3x+4}{2x+3} - \sqrt{2} = \frac{(3x+4) - \sqrt{2}(2x+3)}{2x+3} = \frac{(3-2\sqrt{2})x - (3\sqrt{2}-4)}{2x+3}$
 $= \frac{(3-2\sqrt{2})(x-\sqrt{2})}{2x+3}$ ゆえに $\frac{y-\sqrt{2}}{x-\sqrt{2}} = \frac{3-2\sqrt{2}}{2x+3}$

(2) $x > \sqrt{2}$ より $2x+3 > 2\sqrt{3}+3$ であるから

$$0 < \frac{1}{2x+3} < \frac{1}{3+2\sqrt{3}} = 3-2\sqrt{3} \quad \text{よって} \quad 0 < \frac{3-2\sqrt{2}}{2x+3} < (3-2\sqrt{2})^2$$

(1) から $0 < \frac{y-\sqrt{2}}{x-\sqrt{2}} < (3-2\sqrt{2})^2$

(3) $x_{n+1} = \frac{3x_n+4}{2x_n+3}$ と (1) から $x_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{3x_n+4}{2x_n+3}(x_n - \sqrt{2})$ ……①

まず、すべての自然数 n について $x_n > \sqrt{2}$ であることを数学的帰納法で証明する。

(i) $x_1 = 2 > \sqrt{2}$

(ii) $x_k > \sqrt{2}$ を仮定すると、①により

$$x_{k+1} - \sqrt{2} = \frac{3x_k+4}{2x_k+3}(x_k - \sqrt{2}) > 0 \quad \text{すなわち} \quad x_{k+1} > \sqrt{2}$$

(i), (ii) により、すべての自然数 n について $x_n > \sqrt{2}$ である。

つぎに、(2) により $0 < \frac{x_n - \sqrt{2}}{x_{n-1} - \sqrt{2}} < (3-2\sqrt{2})^2$

ここで $r = (3-2\sqrt{2})^2$ とおくと、 $0 < r < 1$ であり

$$0 < x_n - \sqrt{2} < r(x_{n-1} - \sqrt{2})$$

これを繰り返し用いると

$$0 < x_n - \sqrt{2} < r^{n-1}(x_1 - \sqrt{2}) = r^{n-1}(2 - \sqrt{2})$$

$n \rightarrow \infty$ のとき、 $r^{n-1} \rightarrow 0$ であるから、 $x_n - \sqrt{2} \rightarrow 0$

したがって $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{2}$

