

指数関数, 対数関数の極限について

■ e^x と x の多項式との間に成り立つ不等式

n を負でない整数とする。 $x > 0$ の範囲で、次の不等式が成り立つ。

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \quad \cdots (*)$$

証明 $f_n(x) = e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right) \quad \cdots \textcircled{1}$

とおく。 $x > 0$ の範囲で $f_n(x) > 0$ であることを数学的帰納法を用いて証明する。

(i) $n=0$ のとき

$$x > 0 \text{ において } f_0(x) = e^x - 1 > 0$$

すなわち $\textcircled{1}$ が成り立つ。

(ii) k を負でない整数とする。 $n=k$ のとき $\textcircled{1}$ が成り立つと仮定する。

すなわち、 $x > 0$ において

$$f_k(x) = e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^k}{k!}\right) > 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

であると仮定する。

$$f_{k+1}(x) = e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\right)$$

について

$$f_{k+1}'(x) = e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^k}{k!}\right)$$

である。 $\textcircled{2}$ より $x > 0$ において $f_{k+1}'(x) > 0$ である

から $f_{k+1}(x)$ は単調に増加する。また、 $f_{k+1}(0) = 0$

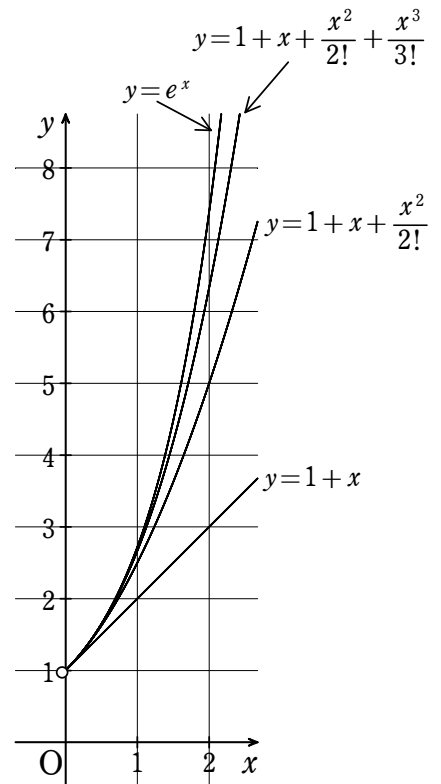
であるから $f_{k+1}(x) > 0$ 、すなわち $\textcircled{1}$ が成り立つ。

したがって、(i)、(ii) より負でない整数 n について

$f_n(x) > 0$ が成り立つ。 (証明終)

参考 右のグラフは、 $x > 0$ の範囲で $n=1, 2, 3$ のとき

(*) が成り立つことを示している。



■ 指数関数, 対数関数の極限

(*) を用いると次の極限が証明できる。

n を負でない整数とする。

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\log x} = \infty \quad \lim_{x \rightarrow +0} x \log x = 0$$

証明 (*) の右辺の各項は正であるから

$$e^x > \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{より} \quad \frac{(n+1)!}{x} > \frac{x^n}{e^x} > 0$$

$x \rightarrow \infty$ のとき $\frac{(n+1)!}{x} \rightarrow 0$ であるから「はさみうちの原理」により

$$\frac{x^n}{e^x} \rightarrow +0 \quad \text{これから} \quad \frac{e^x}{x^n} \rightarrow \infty \quad \text{すなわち} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty$$

$-x=t$ とおくと $x < 0$ のとき $t > 0$ であり

$$x^n e^x = (-t)^n e^{-t} = \frac{(-t)^n}{e^t} \quad \text{から} \quad 0 < \left| \frac{(-t)^n}{e^t} \right| \leq \frac{t^n}{e^t}$$

$x \rightarrow -\infty$ のとき $t \rightarrow \infty$ であるから $\frac{t^n}{e^t} \rightarrow 0$ ゆえに $\frac{(-t)^n}{e^t} \rightarrow 0$ すなわち $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$

$e^x=t$ とおくと $\frac{x}{e^x} = \frac{\log t}{t}$, $x \rightarrow \infty$ のとき $t \rightarrow \infty$ であるから

$$\frac{x}{e^x} \rightarrow +0 \quad \text{ゆえに} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log t}{t} = +0 \quad \text{これから} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{\log t} = \infty$$

結果の式において t を x に置き換えてよい。

$$\frac{1}{x} = t \quad \text{とおくと} \quad \frac{\log x}{x} = t(-\log t) \quad \text{より} \quad t \log t = -\frac{\log x}{x}$$

$x \rightarrow \infty$ のとき $t \rightarrow +0$ であるから

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = +0 \quad \text{より} \quad \lim_{t \rightarrow +0} t \log t = -0$$

t を x に置き換えて求める式が得られる。

(証明終)

参考 右のグラフは $y = x \log x$ の原点の近くの変化を表している。

