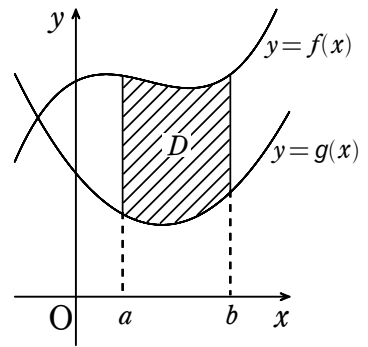


y軸のまわりの回転体の体積 —— バームクーヘン積分 ——

右図において、 $0 \leq a < b$ 、 $a \leq x \leq b$ の区間で $f(x) \geq g(x)$ とする。
 曲線 $y=f(x)$ 、 $y=g(x)$ および直線 $x=a$ 、 $x=b$ で囲まれた斜線の部分を D とするとき、 D を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V は次式で与えられる。

$$V = \int_a^b 2\pi x \{f(x) - g(x)\} dx$$



解説 図 1 において、曲線 $y=f(x)$ 、 $y=g(x)$ および直線 $x=a$ 、 $x=t$ で囲まれた網掛けの部分 $V(t)$ を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を $V(t)$ とすると

$$V(a)=0, V(b)=V$$

t を Δt だけ増加したときの $V(t)$ の増分 ΔV は

$$\Delta V = V(t + \Delta t) - V(t)$$

であり、図 1 の斜線部分を回転してできる回転体の体積を表す。この体積は、図 2 のような円柱の側面の厚さ Δt の「皮」の部分の体積に近似的に等しい。すなわち

$$\Delta V \approx 2\pi t \{f(t) - g(t)\} \Delta t$$

ゆえに

$$V'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = 2\pi t \{f(t) - g(t)\}$$

したがって

$$\begin{aligned} V &= V(b) - V(a) = \left[V(t) \right]_a^b = \int_a^b V'(t) dt \\ &= \int_a^b 2\pi t \{f(t) - g(t)\} dt \end{aligned}$$

積分変数を t から x に代えると

$$V = \int_a^b 2\pi x \{f(x) - g(x)\} dx$$

となる。

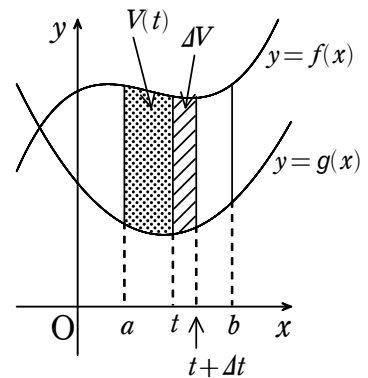


図 1

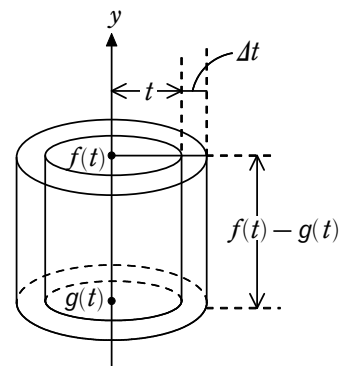
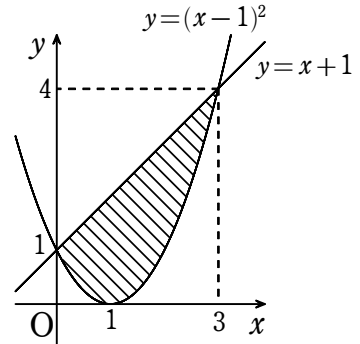


図 2

この定積分法は薄い皮を重ねて足していくという感覚から俗に「バームクーヘン積分」といわれることがある。

例題 直線 $y=x+1$ と放物線 $y=(x-1)^2$ で囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。



解1 求める回転体の体積を V とする。 $y=x+1$ と $y=(x-1)^2$ の交点の座標は $(0, 1)$, $(3, 4)$ であり, $0 \leq x \leq 3$ の区間で $x+1 \geq (x-1)^2$ である。

$$V = \int_0^3 2\pi x \{(x+1) - (x-1)^2\} dx$$

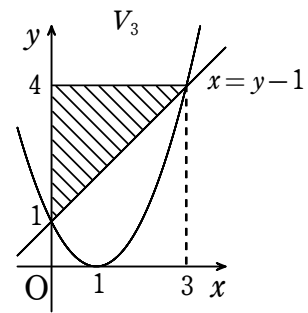
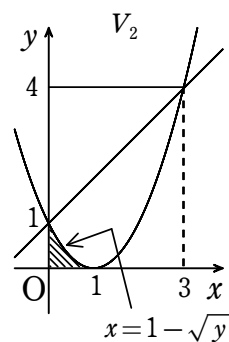
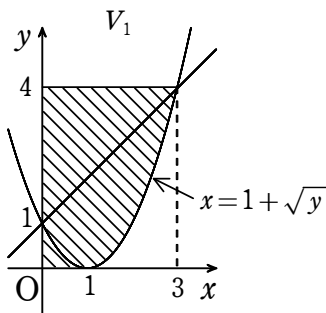
$$= 2\pi \int_0^3 (-x^3 + 3x^2) dx = 2\pi \left[-\frac{x^4}{4} + x^3 \right]_0^3 = \frac{27}{2}\pi$$

解2 次の各部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積をそれぞれ V_1 , V_2 , V_3 とする。

V_1 …… 区間 $0 \leq y \leq 4$ で $x=1+\sqrt{y}$ と y 軸ではさまれた部分

V_2 …… 区間 $0 \leq y \leq 1$ で $x=1-\sqrt{y}$ と y 軸ではさまれた部分

V_3 …… 区間 $1 \leq y \leq 4$ で $x=y-1$ と y 軸ではさまれた部分



$$V_1 = \pi \int_0^4 (1 + \sqrt{y})^2 dy = \pi \int_0^4 (1 + 2y^{\frac{1}{2}} + y) dy$$

$$= \pi \left[y + \frac{4}{3}y^{\frac{3}{2}} + \frac{y^2}{2} \right]_0^4 = \pi \left(4 + \frac{4}{3} \cdot 8 + 8 \right) = \frac{68}{3}\pi$$

$$V_2 = \pi \int_0^1 (1 - \sqrt{y})^2 dy = \pi \int_0^1 (1 - 2y^{\frac{1}{2}} + y) dy$$

$$= \pi \left[y - \frac{4}{3}y^{\frac{3}{2}} + \frac{y^2}{2} \right]_0^1 = \pi \left(1 - \frac{4}{3} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{6}\pi$$

$$V_3 = \pi \int_1^4 (y-1)^2 dy = \pi \left[\frac{(y-1)^3}{3} \right]_1^4 = \frac{64}{3}\pi$$

求める回転体の体積 V は

$$V = V_1 - V_2 - V_3 = \frac{68}{3}\pi - \frac{1}{6}\pi - \frac{64}{3}\pi = \frac{27}{2}\pi$$